EINLEITUNG

IN DIE

DIOPTRIK DES AUGES

VON

Dr. A. WÜLLNER.

MIT 19 FIGUREN IN HOLZSCHNITT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1866.

VORREDE.

Indem ich vorliegendes Schriftchen der Oeffentlichkeit übergebe, komme ich der Aufforderung befreundeter Aerzte nach, die für die Ophthalmologie in neuerer Zeit so wichtigen Gesetze der Dioptrik so zu behandeln, dass sie den Medicinern und Aerzten bei den ihnen im allgemeinen zu Gebote stehenden mathematischen Vorkenntnissen verständlich seien, und dieselben in den Stand setze die Dioptrik des Auges zu verstehen. Ich habe deshalb bei Abfassung des Schriftchens nur die Fähigkeit vorausgesetzt, algebraische Operationen übersehen zu können, und alle vorkommenden Rechnungen vollständig durchgeführt. Um die resultirenden Formeln, auf denen die Bestimmung des Ganges der Lichtstrahlen im Auge beruht, noch übersichtlicher zu machen, habe ich zugleich ausführlich die Construktionen besprochen, welche sich aus diesen Formeln zur Bestimmung der Bilder eines optischen Systems ergeben, und dann die hauptsächlichsten Methoden zur Bestimmung der optischen Constanten des Auges aus den im ersten Theile erhaltenen Gleichungen abgeleitet. Wenn durch dieses Schriftchen auch denen, welche weniger mit mathematischen Deduktionen vertraut sind, es erleichtert wird, die Grundlagen der Dioptrik des Auges zu übersehen, so ist sein Zweck erreicht.

Bonn, im Februar 1866.

A. Wüllner.

Einleitung

in die Dioptrik des Auges.

Das menschliche Auge ist in physikalischer Beziehung eine Reihe von durchsichtigen Medien verschiedener Brechbarkeit, welche von nahezu kugelförmigen Flächen, deren Mittelpunkte auf einer geraden Linie liegen, begrenzt werden. Es bildet dadurch eine Reihe von Linsen, welche in ihrer Gesammtheit als eine Sammellinse wirkt.

Das erste durchsichtige Medium des Auges, in welches die Lichtstrahlen aus der Luft eintreten, ist die durchsichtige Hornhaut (Cornea), aus dieser tritt das Licht in die wässerige Flüssigkeit der vorderen Augenkammer, welche hinten durch die Vorderfläche der Krystalllinse begrenzt ist. Wir werden sehen, dass wir diese beiden Medien zusammen als die erste Linse des Systems betrachten können, welches unser Auge ausmacht. Die zweite Linse bildet dann die Krystalllinse, aus welcher dann das Licht in das dritte durchsichtige Medium, den Glaskörper tritt, auf dessen hinterer Begrenzungsfläche das lichtempfindende Organ, die Netzhaut, ausgebreitet ist.

Durch die Brechung des Lichtes in diesen verschiedenen Medien werden von denjenigen Gegenständen, welche Licht in unser Auge senden, auf der Netzhaut Bilder entworfen, und diese sind es, welche wir wahrnehmen. Um deshalb den Gang der Lichtstrahlen im Auge vollständig übersehen zu können, müssen wir zunächst die allgemeinen physikalischen Gesetze der Lichtbrechung und dann die Gesetze der Brechung in krummen Flächen besprechen. Daran schliesst sich dann die Anwendung der gefundenen Gesetze auf das Auge.

§. 1.

Gesetze der Lichtbrechung. Das Licht ist, wie in der Physik bewiesen wird, eine schwingende Bewegung des überall, sowohl in dem sogenannten leeren Raume als im Innern der Körper verbreiteten Aethers. Diese schwingende Bewegung wird von den leuchtenden Körpern wahrscheinlich dadurch erregt, dass die Atome der leuchtenden Körper selbst eine schwingende Bewegung haben und diese an die umgebenden Aethermoleküle abgeben. Von den leuchtenden Körpern aus pflanzt sich dann die schwingende Bewegung nach allen Richtungen, nach den Radien einer Kugel fort, und zwar so lange die Bewegung in demselben Mittel, also z. B. im leeren Raume oder in Luft oder irgend einem anderen bleibt, immer geradlinig und mit derselben Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit, mit welcher das Licht sich fortpflanzt, wird aber eine andere, sobald das Mittel, in welchem es sich fortpflanzt, ein anderes wird; so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Luft eine andere als im Wasser, dort wieder anders als im Glase. Wenn deshalb das Licht aus einem Mittel in ein anderes übergeht, so z. B. aus Luft in Glas, so ändert sich die Geschwindigkeit plötzlich und die Folge davon ist, dass die Richtung, nach der sich das Licht fortpflanzt, eine andere wird, wenn dasselbe nicht senkrecht auf die Trennungsfläche der beiden Mittel auftrifft. Das Gesetz, nach welchem sich die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes bei dem Uebergange aus einem Mittel in ein anderes ändert, spricht man gewöhnlich so aus, dass man die Lage der Fortpflanzungsrichtung, des Lichtstrahls, in beiden Mitteln zu der an der Eintrittsstelle des Lichtes auf die Grenzfläche beider Mittel errichteten senkrechten, dem Einfallslothe bestimmt. Das Gesetz in seiner einfachsten Form lautet dann:

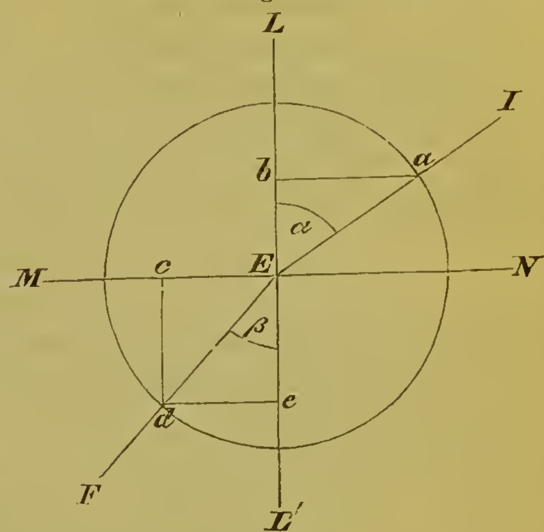
1. Die Richtung des in das zweite Mittel übergegangenen oder gebrochenen Lichtes liegt in der durch den einfallenden Lichtstrahl und das Einfallsloth bestimmten Ebene.

2. Die Sinus der Winkel, welche das Licht im ersten Mittel mit dem Einfallslothe bildet, des Einfallswinkels, und welchen das gebrochene Licht im zweiten Mittel mit dem Einfallslothe bildet, des Brechungswinkels, stehen in einem constanten Verhältnisse; oder der Quotient aus beiden ist, welches auch der Einfallswinkel sein mag, eine constante Grösse; diese constante Grösse heisst der Brechungsexponent des Lichtes beim Uebergange des Lich-

tes aus dem ersten Mittel in das zweite. Beim Uebergange des Lichtes aus Luft in Wasser ist z. B. der Brechungsexponent nahezu gleich $\frac{4}{3}$.

Ist daher MN Fig. 1 die Grenzfläche zweier Mittel, also z. B. von Luft und Wasser und IE die Richtung, in welcher Licht auf die Fläche trifft, so ist EL oder EL' das Einfallsloth. Die Richtung des gebrochenen Lichtes liegt dann zunächst ganz in der durch IE und EL gegebenen Ebene, also der Ebene der Zeichnung. Bezeichnen wir nun den Einfallswinkel IEL mit α, den Brechungswinkel, den die Richtung EF des gebrochenen Lichtes mit dem Einfallslothe EL' bildet, mit β, so ist die Richtung des gebrochenen Lichtes weiter dadurch gegeben, dass

Fig. 1.



$$\frac{\sin\,\alpha}{\sin\,\beta} = n$$

oder wenn über MN Luft, unter MN Wasser ist, gleich $\frac{4}{3}$ ist.

Wir erhalten die Sinus der Winkel α und β bekanntlich, wenn wir um den Punkt E als Mittelpunkt mit einem beliebigen Radius einen Kreis beschreiben und von den Punkten a und d, wo dieser Kreis die Richtungen des Lichtes schneidet, Senkrechte auf das Einfallsloth, ab und dc ziehen. Es ist dann bekanntlich

$$ab = \sin\,\alpha,\; cd = \sin\,\beta$$

und somit muss, wenn EF die Richtung des gebrochenen Strahles ist,

$$\frac{ab}{cd} = n \text{ oder für Wasser gleich } \frac{4}{3}$$

sein.

Die Richtung des Lichtstrahls in einem zweiten Mittel, wenn wir diejenige im ersten kennen, ist hiernach vollständig bestimmt, wenn wir den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus dem ersten in das zweite Mittel kennen. Denn wir erhalten dann den Winkel β, welchen der Strahl im zweiten Mittel mit dem Einfallslothe bildet aus der Gleichung

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}.$$

Das Brechungsgesetz in dieser Form liefert uns auch sofort eine sehr einfache Construction, um die Richtung des gebrochenen Lichtes zu bestimmen. Man ziehe um den Punkt, in welchem die Trennungsfläche beider Mittel von dem ankommenden Lichte getroffen wird, mit einem beliebigen Radius einen Kreis, und ziehe dann von dem Punkte, wo dieser Kreis das einfallende Licht trifft, eine Senkrechte auf das Einfallsloth. Diese Senkrechte, ab Fig. 1, ist der Sinus des Einfallswinkels; da nun

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \text{ also } \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$$

so hat man in dem um E beschriebenen Kreise nur einen Punkt d so zu bestimmen, dass die von d auf das Einfallsloth EL' gezogene Senkrechte $de = \frac{ab}{n}$ wird, und der Punkt E, in welchem das Licht die brechende Fläche trifft, mit diesem Punkte zu verbinden; diese Linie ist die Richtung des gebrochenen Lichtes. Den Punkt d erhält man nun dadurch, dass man von E aus $Ec = \frac{ab}{n}$ aufträgt und durch c eine zu EL' parallele Gerade zieht. Wo diese Gerade den Kreis trifft, dort ist der Punkt d. Denn ziehen wir von d aus dc parallel zu CE, also senkrecht zu EL', so ist $de = CE$, also gleich $\frac{ab}{n}$.

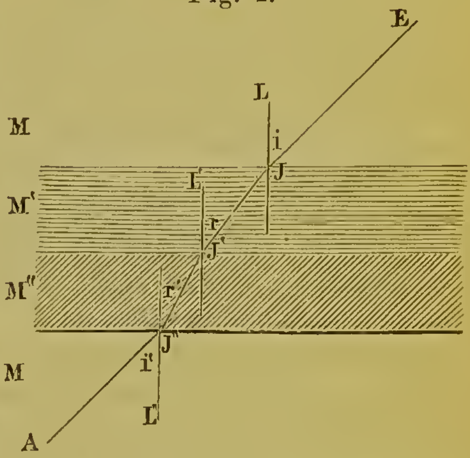
Als den Brechungsexponenten einer Substanz bezeichnet man gewöhnlich denjenigen des Lichtes beim Uebergange aus Luft in die betreffende Substanz; diese Brechungsexponenten sind für die meisten Substanzen bekannt. Aus ihnen kann man nun aber sofort auch den Brechungsexponenten beim Uebertritt aus einer Substanz in irgend eine andere erhalten. Ist nämlich der Brechungsexponent eines ersten Mittels in der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes n_1, derjenige eines zweiten n_2, so ist der Brechungsexponent des Lichtes beim Uebergange aus dem ersten Mittel in das zweite

$$n = \frac{n_2}{n_1}.$$

Wir erhalten also den Brechungsexponenten des Lichtes beim Uebergange aus einem Mittel in ein zweites, wenn wir den Brechungsexponenten des zweiten Mittels in der gewöhnlichen

Bedeutung des Wortes durch denjenigen des ersten Mittels dividiren. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Erfahrung, dass, wenn wir Licht durch eine Reihe von Mitteln hindurchtreten lassen, welche von parallelen Flächen begrenzt sind, es im letzten Mittel in derselben Richtung sich fortpflanzt, wie im ersten, wenn beide Mittel gleich sind. Ist also M' ein brechendes Mittel, etwa Wasser, M'' ein zweites, etwa Glas, deren Begrenzungsflächen einander parallel sind, und ist über M', sowie unter M'' Luft, so ist der austretende Strahl $J''A$ dem eintretenden EJ parallel, also der Winkel, den $J''A$ mit dem Einfallslothe $J''L''$ bildet, gleich dem, welchen EJ mit dem Einfallslothe JL bildet, gleich i. Ist nun $JJ'J''$ der Weg des Lichtes, r der Winkel, welchen es im ersten Mittel mit dem Einfallslothe bildet, r' der, welchen es im zweiten mit demselben bildet, so ist nach unserer Definition

Fig. 2.



$$n = \frac{\sin r}{\sin r'}.$$

Ferner ist
$$n_2 = \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\sin i}{\sin r'}, \quad n_1 = \frac{\sin i}{\sin r},$$

somit
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin r}{\sin r'} = n,$$

wie wir vorhin behaupteten.

Das Brechungsgesetz in der oben gegebenen Form ist zunächst für ebene Trennungsflächen zweier Mittel ausgesprochen, dass es aber auch für krumme Trennungsflächen ganz ebenso gilt, erkennt man sofort, wenn man erwägt, dass man jede krumme Fläche als aus unendlich vielen unendlich kleinen Ebenen zusammengesetzt ansehen kann. Legen wir nämlich an einen Punkt einer krummen Fläche eine Tangentialebene, so fällt in diesem Punkte die krumme Fläche vollständig mit der Tangentialebene zusammen; wird deshalb dieser Punkt von einem in das zweite Mittel eindringenden Lichtstrahle getroffen, so haben wir nur die Tangentialebene dieses Punktes als Trennungsfläche der beiden Mittel anzusehen, um sofort das angeführte Brechungsgesetz zur

Bestimmung des Ganges des gebrochenen Strahles anzuwenden. Die in dem betrachteten Punkte auf die Tangentialebene errichtete Senkrechte, man nennt sie die Normale der Fläche in diesem Punkte, ist dann das Einfallsloth, und das Brechungsgesetz sagt dann aus: 1) dass der gebrochene Lichtstrahl ganz in der durch die Normale und den einfallenden Lichtstrahl bestimmten Ebene liegt und 2) dass der Quotient aus dem Sinus der Winkel, welche der einfallende und gebrochene Strahl mit der Normale bilden, constant und gleich dem Brechungsexponenten des Mittels ist. Der Unterschied zwischen der Brechung des Lichtes in ebenen und in krummen Flächen ist deshalb nur der, dass in ebenen Flächen die Einfallslothe in allen Punkten einander parallel sind, während bei krummen Flächen die Einfallslothe der verschiedenen Punkte verschieden gerichtet sind. Um den Gang eines eine krumme Fläche treffenden Bündels von Strahlen im zweiten Mittel bestimmen zu können, bedarf es daher ausser der Kenntniss des Brechungsexponenten auch derjenigen der Richtungen der Einfallslothe, oder was dasselbe ist, des Gesetzes, nach welchem die Fläche gekrümmt ist.

Da, wie in der Einleitung erwähnt wurde, die brechenden Flächen unseres Auges als Kugelflächen angesehen werden können, so ist es zunächst unsere Aufgabe, die Brechung des Lichtes durch kugelförmige Flächen zu untersuchen, das heisst zu bestimmen, wie ein Bündel von Lichtstrahlen, welches aus einem Mittel durch eine kugelförmige Trennungsfläche in ein zweites Mittel übertritt, in diesem zweiten sich fortpflanzt. Die Lage der Einfallslothe bei kugelförmigen Flächen ist bekanntlich durch den Satz gegeben, dass bei der Kugel der an einen Punkt gezogene Radius senkrecht steht auf der in diesem Punkte die Kugel berührenden Ebene. Die Radien der Kugel sind daher die zu den verschiedenen Punkten gehörigen Einfallslothe, und die Winkel, welche der einfallende und gebrochene Strahl mit dem Radius bilden, sind der Einfalls- und Brechungswinkel.

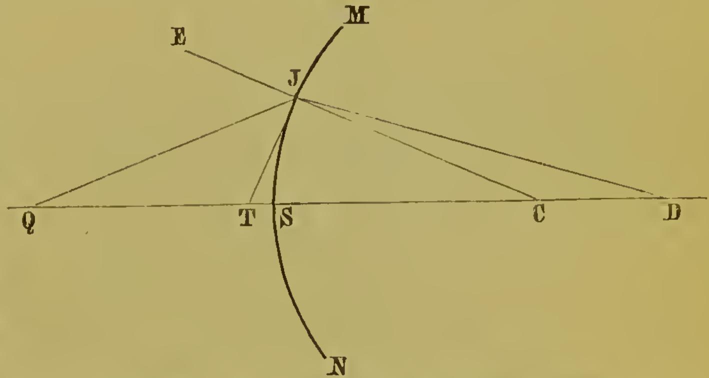
§. 2.

Brechung des Lichtes in einer kugelförmigen Fläche.

Es sei, um die Brechung des Lichtes zunächst in einer kugelförmigen Fläche zu bestimmen, MN Fig. 3 der Durchschnitt

durch eine solche Fläche, welche zwei verschiedene Mittel, etwa Luft und Glas von einander trennt, der Mittelpunkt derselben sei C, und vor derselben in Q befinde sich ein leuchtender Punkt. Wir werden nun den Gang der Lichtstrahlen im zweiten Mittel kennen, wenn wir wissen, wie sich ein beliebiger von Q ausgehender Strahl QJ, der die brechende Fläche in einem Punkte J trifft, sich nach der Brechung in dem zweiten Mittel fortpflanzt. Da der gebrochene Strahl eine gerade Linie ist, so genügt es, um seine Richtung zu bestimmen, wenn wir zwei Punkte desselben kennen. Ein Punkt des gebrochenen Strahles ist in dem Punkte J, in welchem er in das zweite Mittel eintritt, gegeben, es ist daher nur die Bestimmung noch eines Punktes erforderlich, um seine Lage festzustellen. Wir wählen als zweiten zu bestimmenden Punkt den Punkt D, in welchem der gebrochene Strahl die passend verlängerte Verbindungslinie QC des leuchtenden Punktes Q mit dem Mittelpunkte C der brechenden Fläche trifft. Den Punkt D bestimmen wir durch seinen Abstand vom Mittelpunkte C oder von dem Punkte S, dem Punkte, wo die Verbindungslinie QC die brechende Fläche schneidet. Wir gelangen zu dieser Bestimmung durch Anwendung des Satzes aus der Trigonometrie, dass in einem Dreiecke zwei Seiten sich verhalten wie die Sinus der Gegenwinkel. Dieser Satz liefert uns folgende zwei Gleichungen:

Fig. 3.



$$QC : QJ = \sin QJC : \sin QCJ \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$CD : JD = \sin CJD : \sin DCJ \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

und durch Division der ersten Gleichung durch die zweite erhalten wir

$$\frac{QC}{CD} : \frac{QJ}{JD} = \frac{\sin QJC}{\sin CJD} : \frac{\sin QCJ}{\sin DCJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Der in dieser Gleichung vorkommende Winkel QJC, der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit dem Radius CJ bildet, ist der Nebenwinkel des Winkels QJE, welcher nach der Schlussbemer-

kung des vorigen Paragraphen der Einfallswinkel des Strahles QJ ist. Da nun der Sinus eines Winkels gleich ist dem Sinus seines Nebenwinkels, so ist $\sin QJC$ gleich dem Sinus des Einfallswinkels. Der Winkel CJD ist der Winkel, welchen der gebrochene Strahl mit dem Radius CJ bildet, er ist also der Brechungswinkel des Strahles QJ. Nach dem Brechungsgesetze ist daher

$$\frac{\sin QJC}{\sin CJD} = n$$

gleich dem Brechungsexponenten des zweiten Mittels. Die Winkel QCJ und DCJ sind Nebenwinkel, ihre Sinus sind daher einander gleich, und der Quotient

$$\frac{\sin QCJ}{\sin DCJ} = 1.$$

Setzen wir nun diese Werthe in unsere Gleichung ein, so wird

$$\frac{QC}{CD} : \frac{QJ}{JD} = n : 1; \quad \frac{QC}{CD} = n \frac{QJ}{JD}$$

und daraus, indem wir letztere Gleichung nach CD auflösen,

$$CD = \frac{1}{n} \cdot \frac{JD.\,QC}{QJ} = \frac{1}{n} \cdot \frac{JD\,(QS + SC)}{QJ}.$$

Die Lage des Punktes D, oder der Werth von CD hängt somit ab von dem Brechungsexponenten des zweiten Mittels, dem Abstande QS des leuchtenden Punktes von der brechenden Fläche, dem Radius SC der brechenden Fläche und ausserdem von der Lage des Punktes J auf derselben, denn mit der Lage des letzteren ändert sich, wenn auch die Lage des Punktes Q dieselbe bleibt, der Werth von QJ und damit auch der Werth von CD. Für alle Strahlen aber, welche von dem leuchtenden Punkte Q ausgehend die Fläche in Punkten treffen, welche ebenso liegen als der Punkt J, für welche also QJ denselben Werth hat, ist auch der Werth von CD derselbe; alle diese Strahlen schneiden sich also nach der Brechung in dem Punkte D. Denken wir uns nun den Durchschnitt MN durch die brechende Fläche um QC als Axe gedreht, so beschreibt der Punkt J auf derselben einen Kreis, und alle Punkte dieses Kreises liegen in Bezug auf den Punkt Q genau wie der Punkt J. Für alle von Q ausgehenden Strahlen, welche die brechende Fläche in diesem Kreise treffen, hat QJ denselben Werth, alle diese Strahlen schneiden sich also nach der Brechung in dem Punkte D. Wegen dieser Eigenschaft nennt man den Punkt D den Brennpunkt des Ringes J. Wie

man sieht, entsprechen den verschiedenen Ringen verschiedene Brennpunkte, in welchen sich die auf erstere auftreffenden Strahlen nach der Brechung schneiden.

Nehmen wir nun aber an, dass die brechende Fläche in Bezug auf die übrigen hier in Betracht kommenden Dimensionen, also besonders in Bezug auf den Abstand der leuchtenden Punkte so klein sei, dass wir, wo auch der Punkt J auf derselben liegen mag, alle Werthe von QJ einander gleich und gleich QS, gleich dem Abstande des leuchtenden Punktes von dem Scheitel S der brechenden Fläche setzen können, so werden alle die Fläche treffenden Strahlen nach der Brechung in einem und demselben Punkte vereinigt. Denn vertauschen wir in unserer Gleichung QJ mit QS und demzufolge auch JD mit SD, so wird

$$CD = \frac{1}{n} \frac{SD\,(QS + SC)}{QS}.$$

Es hängt somit dann die Lage des Punktes D nur mehr ab von dem Radius der brechenden Fläche, dem Brechungsexponenten des zweiten Mittels und dem Abstande des leuchtenden Punktes von der brechenden Fläche. Alle von einem Punkte ausgehenden, die brechende Fläche treffenden Strahlen haben also nur einen Brennpunkt in dem durch obige Gleichung bestimmten Punkte D. Bei einem und demselben brechenden Mittel und derselben brechenden Fläche hängt die Lage des Brennpunktes nur ab von der Lage des leuchtenden Punktes.

Man bezeichnet nun gewöhnlich den Abstand des leuchtenden Punktes Q von dem Scheitel der brechenden Fläche S oder QS mit a, den Abstand des Brennpunktes von demselben Scheitel oder SD mit f, und den Radius der brechenden Fläche mit r; setzen wir diese Bezeichnungen in unsere Gleichung ein, so wird

$$CD = SD - SC = f - r = \frac{f\,(a + r)}{na}$$

oder, wenn wir diese Gleichung nach f auflösen, zunächst auf beiden Seiten mit na multipliciren und die Glieder, welche f enthalten, auf eine Seite bringen

$$naf - (a + r)\,f = nar = f\,(na - a - r),$$

und indem wir durch den Coefficienten von f auf beiden Seiten dividiren, schliesslich

$$f = \frac{nar}{(n-1)\,a - r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung tritt dann deutlich hervor, dass die Lage

des Brennpunktes nur abhängt von n, a, r, und dass jedem leuchtenden Punkte Q ein bestimmter Brennpunkt D entspricht, welcher auf der Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte der brechenden Fläche liegt.

Ehe wir nun dazu übergehen, dieses Resultat näher zu besprechen und anzuwenden, ist es nothwendig, dasselbe zu erweitern. Bisher haben wir nämlich, das geht aus der ganzen Ableitung hervor, stillschweigend vorausgesetzt, dass das Licht die brechende Fläche auf ihrer convexen Seite träfe; es fragt sich nun, gilt das Resultat ebenso, wenn das Licht die concave Seite der brechenden Fläche trifft, wenn also etwa D Fig. 2 der leuchtende Punkt ist. Es sei das der Fall und DS sei der einfallende, QJ der gebrochene Strahl, also DJC der Einfallswinkel, QJE der Brechungswinkel. Es bestehen jetzt ganz ebenso die Gleichungen (a) und (b) wie vorhin und deshalb auch die Gleichung (c) oder

$$\frac{QC}{CD} : \frac{QJ}{JD} = \frac{\sin QJC}{\sin CJD} : \frac{\sin QCJ}{\sin DCJ}$$

und es ist ganz ebenso

$$\frac{\sin QCJ}{\sin DCJ} = 1.$$

Da nun aber jetzt CJD der Einfallswinkel und QJC der Nebenwinkel des Brechungswinkels ist, so ist jetzt

$$\frac{\sin CJD}{\sin QJC} = n,$$

gleich dem Brechungsexponenten des zweiten Mittels, in welches das Licht eintritt, und demnach erhalten wir jetzt

$$\frac{QC}{CD} : \frac{QJ}{JD} = \frac{1}{n} : 1$$

oder wenn wir uns wieder auf die unmittelbar bei J die brechende Fläche treffenden Strahlen beschränken, also DJ und QJ mit SD und SQ vertauschen,

$$\frac{QC}{CD} : \frac{QS}{SD} = \frac{1}{n} : 1.$$

Nennen wir nun wieder den Abstand des jetzt leuchtenden Punktes D von S a, und den Abstand des jetzigen Brennpunktes Q von S oder QS f, so wird

$$\frac{f + r}{a - r} : \frac{f}{a} = \frac{1}{n} : 1.$$

Daraus erhalten wir, indem wir die Produkte der innern und äussern Glieder der Proportion gleichsetzen

$$\frac{f+r}{a-r} : \frac{f}{na}$$

und indem wir gerade wie vorhin nach f auflösen, zunächst

$$naf - af + rf = -nar = f(na - a + r)$$

$$f = \frac{-nar}{(n-1)\,a + r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1\ (a)$$

Der Ausdruck (1 a) ist von dem Ausdrucke (1) nur in einem Punkte unterschieden, nämlich darin, dass die Glieder auf der rechten Seite, welche r, den Radius der brechenden Fläche, enthalten, hier negativ sind, während sie oben positiv waren. Daraus folgt, dass die oben für convexe brechende Flächen abgeleiteten Sätze auch für concave brechende Flächen gelten, dass jeder leuchtende Punkt einen Brennpunkt hat, den wir in ganz ähnlicher Weise berechnen können. Wir können deshalb die Gleichung (1) ganz allgemein für alle brechenden Flächen anwenden, wenn wir nur das Vorzeichen des in derselben vorkommenden Radius unbestimmt lassen und bemerken, dass dasselbe positiv sein muss, wenn die brechende Fläche dem ankommenden Lichte die convexe, negativ dagegen, wenn sie dem Lichte ihre concave Seite zukehrt.

Unsere Gleichung (1) können wir vereinfachen und für manche Zwecke bequemer machen durch Einführung der beiden Hauptbrennweiten. Es gibt nämlich einen Punkt vor der brechenden Fläche, der so gelegen ist, dass die von ihm aus auf die brechende Fläche treffenden Strahlen nach der Brechung einander und der Axe der brechenden Fläche parallel werden, für welchen also der Brennpunkt uendlich weit hinter der brechenden Fläche liegt. Diesen Punkt nennt man den ersten Hauptbrennpunkt und seinen Abstand von der brechenden Fläche die erste Hauptbrennweite.

Als zweiten Hauptbrennpunkt bezeichnet man jenen Punkt in dem zweiten Mittel, in welchem nach der Brechung diejenigen Strahlen sich vereinigen, welche der Axe parallel die brechende Fläche treffen, für welche also der leuchtende Punkt unendlich weit von der brechenden Fläche entfernt ist.

Die Werthe dieser Hauptbrennweiten ergeben sich aus der Gleichung (1). Führen wir anstatt des Werthes von f seinen reciproken Werth ein, so wird

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)\,a - r}{n\,a\,r}$$

oder indem wir die Division auf der rechten Seite, so weit es geht, ausführen,

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{n\,r} - \frac{1}{n\,a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die erste Hauptbrennweite, sie heisse A, finden wir nun, indem wir jenen Werth von a bestimmen, für welchen f unendlich, also $\frac{1}{f} = 0$ wird; wir erhalten denselben aus der Gleichung

$$o = \frac{n-1}{n\,r} - \frac{1}{n\,A};\quad \frac{n-1}{n\,r} = \frac{1}{n\,A}$$

und daraus

$$A = \frac{r}{n-1}.$$

Um die zweite Hauptbrennweite zu erhalten, haben wir in der Gleichung (2) jenen Werth F von f zu suchen, welcher dem Werthe a gleich unendlich entspricht; derselbe ergibt sich, da $\frac{1}{n\,a}$ dann gleich o ist, aus

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{n\,r};\quad F = \frac{n\,r}{n-1}.$$

Zwischen den beiden Hauptbrennweiten besteht also die Beziehung

$$F = n \,.\, A,$$

die zweite ist gleich der ersten multiplicirt mit dem Brechungsexponenten des zweiten Mittels.

Wie man sieht, ist das erste Glied in der Gleichung (2) auf der rechten Seite der reciproke Werth der zweiten Hauptbrennweite; setzen wir dieselbe ein, so wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{na} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Multipliciren wir nun in Gleichung (3) alle Glieder mit F, so wird

$$\frac{F}{f} = 1 - \frac{F}{na};\quad \frac{F}{f} + \frac{F}{na} = 1.$$

Nun ist, wie wir soeben sahen,

$$\frac{F}{n} = A$$

und setzen wir diesen Werth in die letzte Gleichung, so wird

$$\frac{F}{f} + \frac{A}{a} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder daraus

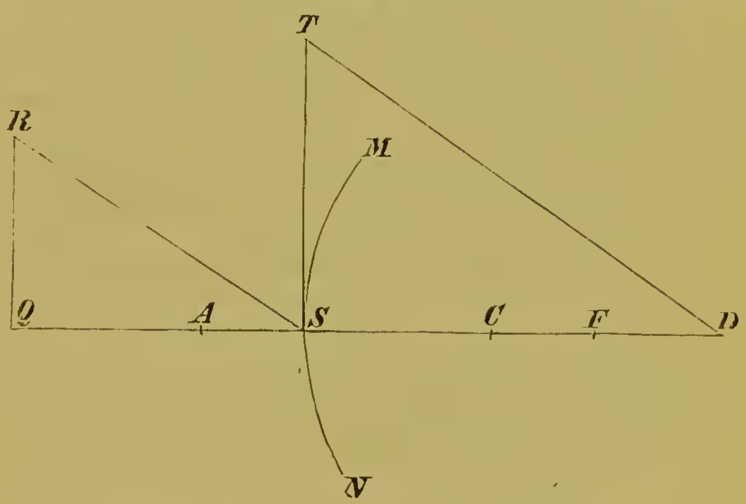
$$f = \frac{a \cdot F}{a - A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Es bedarf also hiernach nur der Kenntniss der beiden Hauptbrennweiten und des Abstandes des leuchtenden Punktes von dem Scheitel der brechenden Fläche, um sofort den Brennpunkt des leuchtenden Punktes bestimmen zu können.

Die Gleichung (5) gibt uns sogar mit Hülfe der beiden Hauptbrennweiten eine sehr einfache Construction zur Bestimmung des Brennpunktes. Wir können die Gleichung (5) in die Proportion auflösen

$$f : F = a : a - A.$$

Fig. 4.



Ziehen wir nun in dem Scheitel S der brechenden Fläche $ST = F$ senkrecht zur Axe QC, ferner im leuchtenden Punkte $QR = a - A$ ebenfalls senkrecht zur Axe, verbinden R mit S und ziehen durch T eine Parallele zu RS, bis sie die Axe in D schneidet, so ist D der Brennpunkt von Q. Denn nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke ist, weil

$$\triangle\, QRS \sim \triangle\, STD$$
$$SD : ST = SQ : QR.$$

Da nun in dieser Proportion $ST = F$, $SQ = a$, $QR = a - A$, so folgt

$$SD : F = a : a - A$$

und somit aus der aus (5) abgeleiteten Proportion, dass $SD = f$ und D der gesuchte Brennpunkt ist.

§. 3.

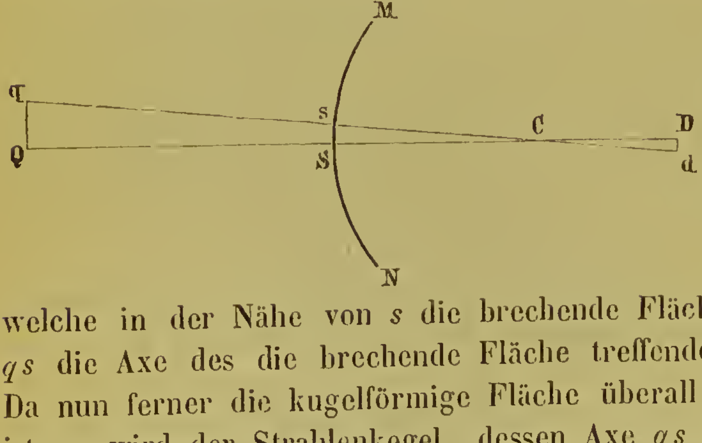
Entwerfung von Bildern durch eine brechende Fläche.

In dem vorigen Paragraphen haben wir den Nachweis geliefert, dass alle von einem auf der Axe der brechenden Fläche liegenden Punkte ausgehenden Strahlen sich nach der Brechung wieder in einem Punkte schneiden. Als Axe der brechenden Fläche bezeichneten wir dabei jene Gerade, die durch den Mittelpunkt der Kugel, von welcher die brechende Fläche ein Segment ist, und die Mitte oder den Scheitel der brechenden Fläche selbst geht, also jene Linie, um welche wir unsern Durchschnitt zur Erzeugung der brechenden Fläche gedreht denken können.

Da nun im zweiten Mittel der Brennpunkt der allen gebrochenen Strahlen gemeinschaftliche Punkt ist, so sehen wir in demselben, wenn unser Auge von den gebrochenen Strahlen getroffen wird, einen leuchtenden Punkt; dieser leuchtende Punkt ist also ein Bild des vor der brechenden Fläche liegenden leuchtenden Punktes.

Ganz ebenso wie von einem auf der Axe liegenden leuchtenden Punkte durch die brechende Fläche ein Bild entworfen wird, so geschieht das auch von einem ausserhalb der Achse liegenden Punkte; die Lage desselben erhalten wir leicht auf folgende Weise: Ist q Fig. 5 ein in nicht zu grosser Entfernung von der Axe QC liegender leuchtender Punkt und qC die Verbindungslinie desselben mit dem Mittelpunkte C, so hat diese Linie qC in Bezug auf q dieselbe Bedeutung wie die Achse der brechenden Fläche in Bezug auf einen in der Axe liegenden leuchtenden Punkt. Denn wenn wir auch hier uns auf die Strahlen beschränken,

Fig. 5.



welche in der Nähe von s die brechende Fläche treffen, so ist qs die Axe des die brechende Fläche treffenden Strahlenkegels. Da nun ferner die kugelförmige Fläche überall gleich gekrümmt ist, so wird der Strahlenkegel, dessen Axe qs ist, in Bezug auf qs ebenso gebrochen werden, wie der zu QS gehörige Strahlenkegel in Bezug auf die Hauptaxe. Die gebrochenen Strahlen werden sich daher auch jetzt alle in einem auf der verlängerten

qC liegenden Punkte d schneiden, dessen Abstand sd von der brechenden Fläche in s nach der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen gegeben ist durch

$$sd = \frac{n \cdot sq \cdot r}{(n-1)\, sq - r}.$$

Ist nun die Lage des Punktes q durch die Grösse des Abstandes qs und die Lage der Nebenaxe qC, letztere etwa durch den Winkel $qCS = \alpha$ gegeben, so ist auf diese Weise die Lage des Brennpunktes d ausreichend bestimmt. Indess würde diese Bestimmung häufig sehr unbequem sein, z. B. wenn es sich darum handelt, die gegenseitige Lage von Brennpunkten zu bestimmen, welche zu einer Reihe von leuchtenden Punkten, etwa einer leuchtenden Linie qQ Fig. 5 gehören. Es ist deshalb bequemer, die Lage des Brennpunktes d mit Hülfe zweier Abstände zu bestimmen, nämlich mit Hülfe des senkrechten Abstandes dD dieses Punktes von der Hauptaxe QC und des Abstandes des Punktes D, in welchem die Senkrechte dD die Axe trifft, vom Scheitel S, also der Länge DS. Wir gelangen dazu leicht mit Hülfe der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen; gemäss derselben erhalten wir nämlich für sd die Gleichung

$$\frac{F}{sd} + \frac{A}{sq} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

in welcher F und A, die beiden Hauptbrennweiten, genau dieselbe Bedeutung haben wie vorher, nämlich

$$F = \frac{nr}{n-1};\ A = \frac{r}{n-1}$$

wie man unmittelbar sieht, wenn man aus obiger Gleichung für sd die Werthe für die Hauptbrennweiten genau so ableitet, wie wir sie aus der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen erhielten. Lassen wir nun von q eine Senkrechte qQ auf die Hauptaxe herab und ziehen ebenfalls dD senkrecht zu QD, so haben wir, da wir auch sS wegen seiner geringen Grösse als zur Axe senkrecht ansehen können,

$$QS = qs \,.\, \cos\alpha;\ SD = sd \,.\, \cos\alpha,$$

worin α den Winkel $qCQ = dCD$ bedeutet.

Dividiren wir nun die Gleichung (a) durch $\cos\alpha$, so wird

$$\frac{F}{sd \,.\, \cos\alpha} + \frac{A}{sq \,.\, \cos\alpha} = \frac{F}{SD} + \frac{A}{SQ} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Da wir nun voraussetzen, dass q stets sehr nahe bei der Axe liegt, so ist der Winkel α stets sehr klein und desshalb $\cos\alpha$ nur sehr

wenig von 1 verschieden; vernachlässigen wir diesen Unterschied, so wird obige Gleichung

$$\frac{F}{SD} + \frac{A}{SQ} = 1.$$

Zwischen den beiden Abständen der Fusspunkte des leuchtenden Punktes und seines Brennpunktes besteht also dieselbe Beziehung wie zwischen den Abständen eines auf der Axe liegenden leuchtenden Punktes und seines Brennpunktes vom Scheitel. Würde sich also in Q, dem Fusspunkte des leuchtenden Punktes q, ein leuchtender Punkt befinden, so würde sein Brennpunkt in D, dem Fusspunkte des Brennpunktes d liegen.

Zur Bestimmung der Brennpunkte von ausserhalb der Axe liegenden leuchtenden Punkten erhalten wir also zunächst folgende Regel. Man lasse von dem leuchtenden Punkte eine Senkrechte auf die Axe herab und bestimme den Brennpunkt des Punktes, in welchem die Axe von jener Senkrechten getroffen wird. In dem Brennpunkte ziehe man dann eine Senkrechte zur Axe, parallel der ersten Senkrechten; auf dieser letztern Senkrechten muss dann der gesuchte Brennpunkt liegen.

Um denselben dann vollständig zu bestimmen, bedarf es noch der Angabe, wie weit der Brennpunkt auf dieser Senkrechten von der Axe entfernt ist. Zu dieser gelangen wir durch die Bemerkung, dass der Brennpunkt auf der Nebenaxe qC liegen muss, dass er also dort liegt, wo diese Nebenaxe die Senkrechte Dd in d schneidet.

Daraus folgt nämlich, dass die Dreiecke qQC und dDC ähnlich sind, und somit, dass

$$dD : qQ = DC : QC$$

oder wenn wir auch hier wieder $QS = a$ und DS, den Abstand des Punktes D, welcher der Brennpunkt von Q, also durch die Gleichung

$$DS = \frac{nar}{(n-1)\ a - r}$$

gegeben ist, mit f bezeichnen, so ist $DC = f - r$, $QC = a + r$, und somit

$$dD : qQ = f - r : a - r$$

$$dD = \frac{f - r}{a - r} \cdot qQ$$

Gut ist es, wenn wir schon hier bemerken, dass wenn f grösser als r ist, der Punkt d auf der entgegengesetzten Seite der Axe

liegt, wie der Punkt q, da die Hauptaxe QC und die Nebenaxe qC sich stets im Mittelpunkte, also in dem Falle zwischen dem leuchtenden Punkte und dem Brennpunkte schneiden. Um das in unserer Gleichung schon hervortreten zu lassen, wollen wir dD das negative Vorzeichen geben, die Gleichung also schreiben

$$-dD = \frac{f-r}{a-r} \cdot qQ$$

oder

$$dD = -\frac{f-r}{a-r} \cdot qQ.$$

Wie man sieht, erhält der Ausdruck rechts, wenn man ihn ausrechnet, das negative Vorzeichen, wenn f grösser, das positive Vorzeichen, wenn f kleiner als r ist. Die verschiedenen Vorzeichen deuten dann die verschiedene Lage des Punktes d in Bezug auf die Axe an; liegt derselbe auf der Seite der Axe, auf welcher q liegt, hat dD das positive, liegt er auf der entgegengesetzten Seite der Axe, hat dD das negative Vorzeichen. Setzen wir nun in den Ausdruck für dD den Werth von f ein, so wird

$$dD = -\frac{\frac{nar}{(n-1)\,a-r} - r}{a-r} \cdot qQ = -\frac{r}{(n-1)\,a-r} \cdot qQ = -\frac{f}{na}\,qQ.$$

Aus den soeben abgeleiteten Sätzen über die Lage der Brennpunkte von ausserhalb der Axe liegenden leuchtenden Punkten folgt nun sofort, dass leuchtende, zur Hauptaxe senkrechte Linien als Bilder ebenfalls leuchtende zur Axe senkrechte Linien haben, welche dort liegen, wo der auf der Hauptaxe liegende Punkt der leuchtenden Linie seinen Brennpunkt hat und deren Grösse durch die letzte Gleichung für dD gegeben ist. Denn denken wir uns zwischen q und Q die Linie qQ als aus einer Reihe von leuchtenden Punkten bestehend, so liegt der Brennpunkt jedes dieser Punkte nach den abgeleiteten Sätzen auf der Linie dD in dem durch die letzte Gleichung bestimmten Abstande. Diese einzelnen Brennpunkte bilden dann die Linie dD, von der aus im zweiten Mittel nach der Brechung die Strahlen ausgehen, welche vor der Brechung von qQ ausgingen. Die Linie dD ist somit das Bild von qQ.

Ebenso ferner wie eine kugelförmige brechende Fläche von einer zur Axe senkrechten Linie als Bild eine zur Axe senkrechte Linie entwirft, so entwirft sie auch von einer zur Axe senkrechten Ebene als Bild eine zur Axe senkrechte Ebene, deren Lage und Grösse durch dieselben oben entwickelten Sätze gegeben ist.

Um das zu übersehen, brauchen wir uns nur Fig. 5 um die Axe QCD gedreht zu denken. Die Linien Qq und Dd beschreiben dann zu der Axe senkrechte Kreise, und der Kreis dD ist das Bild des Kreises qQ. Denn wir können uns den von qQ beschriebenen Kreis als aus lauter einzelnen leuchtenden Radien zusammengesetzt denken; jeder dieser Radien hat dann in dem von Dd beschriebenen Kreise einen Radius als Bild, und ebenso wie die einzelnen Radien qQ den leuchtenden Kreis zusammensetzen, so setzen die einzelnen Bilder den von Dd beschriebenen Kreis zusammen; letzterer ist also das Bild des ersteren.

Wir gelangen somit allgemein zu dem Satze, dass eine kugelförmige brechende Fläche von vor ihr vorhandenen leuchtenden Objecten, seien es Punkte, Linien oder Ebenen, Bilder entwirft, wiederum Punkte, Linien und Ebenen, so dass das Bild dem leuchtenden Objecte ähnlich ist. Die Lage dieser Bilder ist nach unsern Gleichungen gegeben durch den auf der Axe gerechneten Abstand vom Scheitel der brechenden Fläche und durch den Abstand des Bildes von der Axe. Letzterer Abstand gibt uns auch, wenn der leuchtende Gegenstand eine zur Axe senkrechte Linie oder Ebene ist, die Grösse des entworfenen Bildes.

Ist a der auf der Axe gerechnete Abstand des leuchtenden Gegenstandes von dem Scheitel der brechenden Fläche, f der auf der Axe gerechnete Abstand des Bildes von demselben, so ist nach dem Vorigen f gegeben durch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{na} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

worin wie vorhin F die zweite Hauptbrennweite bedeutet.

Ist Y der Abstand des leuchtenden Punktes von der Axe oder die Grösse der leuchtenden Linie oder Ebene, so ist der Abstand y des Bildpunktes von der Axe, oder die Grösse des Bildes gegeben durch

$$y = -\frac{r}{(n-1)\,a - r} \cdot Y = -\frac{f}{na}\, Y. \; (B)$$

Die beiden Gleichungen (A) und (B) bestimmen Lage und Grösse der Bilder vollständig.

Aus der Gleichung (A) ergibt sich, dass die Lage des Bildes wesentlich abhängig ist von dem Abstande des leuchtenden Objectes vom Scheitel; je nachdem kann es ein reelles oder virtuelles sein, das heisst, es können die Strahlen in dem zweiten Mittel sich wirklich zu einem Bilde des leuchtenden Gegenstandes

vereinigen, oder sie pflanzen sich im zweiten Mittel so fort, als kämen sie von einem vor der brechenden Fläche befindlichen Bilde, welches dann in einer anderen Entfernung von der brechenden Fläche liegt als das leuchtende Object. Unsere Gleichung (A) gibt uns das zu erkennen, indem der Werth von f je nach dem Werthe von a das positive oder negative Vorzeichen erhält. Ist der Werth von f positiv, so bedeutet das nach dem Bisherigen, dass das Bild im zweiten Mittel, also von dem leuchtenden Gegenstande an gerechnet, hinter der brechenden Fläche liegt. Das entgegengesetzte Vorzeichen, welches angibt, dass das Bild auf der entgegengesetzten Seite der brechenden Fläche liegt, bedeutet somit, dass die Strahlen sich in dem zweiten Mittel so ausbreiten, als kämen sie von einem vor der brechenden Fläche liegenden Objecte. Da nun das von diesen Strahlen getroffene Auge dort, wo dieselben sich kreuzen, den Ursprung derselben sucht, so sieht es in dem betreffenden Abstande vor der brechenden Fläche ein Bild des leuchtenden Objectes, dem keine reelle Existenz zukommt.

Solche virtuelle Bilder entstehen bei convexen Flächen, wo also r positiv ist, immer dann, wenn die leuchtenden Gegenstände zwischen dem ersten Hauptbrennpunkte und der brechenden Fläche liegen, wenn also nach unserer früheren Bezeichnung

$$a < A$$

kleiner als die erste Hauptbrennweite ist. Da in dem Falle auch immer

$$(n - 1)\ a < r$$

ist, so wird der Werth von y in Gleichung (B) immer positiv, somit ist das virtuelle Bild immer ein aufrechtes, das heisst, die Bilder der leuchtenden Punkte liegen auf derselben Seite der Axe und in derselben Reihenfolge wie die leuchtenden Punkte selbst.

Noch eines Falls betreffs der Erzeugung von Bildern müssen wir erwähnen, nämlich dessen, wo das leuchtende Object nur ein virtuelles, hinter der brechenden Fläche liegendes ist, das heisst, wenn die Strahlen im ersten Mittel sich so fortpflanzen, dass sie, wenn das zweite Mittel nicht vorhanden wäre, sich erst hinter der brechenden Fläche schneiden würden. Der Fall würde z. B. eintreten, wenn ein nach einem hinter der brechenden Fläche liegenden Punkte convergirendes Strahlenbündel auf die brechende Fläche auffiel. Um diesen Fall mit Hülfe der beiden Gleichungen

(A) und *(B)* zu untersuchen, haben wir in denselben den auf der Axe gerechneten Abstand a des Punktes, nach welchem die Strahlen convergiren, nur mit dem negativen Vorzeichen versehen einzuführen. Denn die Abstände der leuchtenden vor der brechenden Fläche liegenden Punkte haben wir ohne Vorzeichen gelassen, also mit dem positiven Vorzeichen versehen; um deshalb anzudeuten, dass in diesem Falle die leuchtenden Punkte hinter der brechenden Fläche liegen, müssen wir ihren Abstand von der brechenden Fläche als negativ bezeichnen.

Dass wir in der That dann die Lage des Brennpunktes richtig bestimmen, das lässt sich leicht an einzelnen Beispielen zeigen. Wenn z. B. ein Strahlenkegel auf die brechende Fläche fällt, der nach dem Mittelpunkte derselben convergirt, so tritt keine Brechung ein, da dann jeder Strahl in der Richtung des Radius, also des Einfallslothes, die brechende Fläche trifft. Die Strahlen werden sich dann also auch im Mittelpunkte der brechenden Fläche treffen, und es entsteht in demselben ein reelles Bild des virtuellen leuchtenden Punktes. Unsere Gleichung *(A)* ergibt das sofort, denn setzen wir in derselben $a = -r$, so wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{nr}$$

oder da

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{nr}; \quad \frac{1}{f} = \frac{n-1}{nr} + \frac{1}{nr} = \frac{1}{r},$$

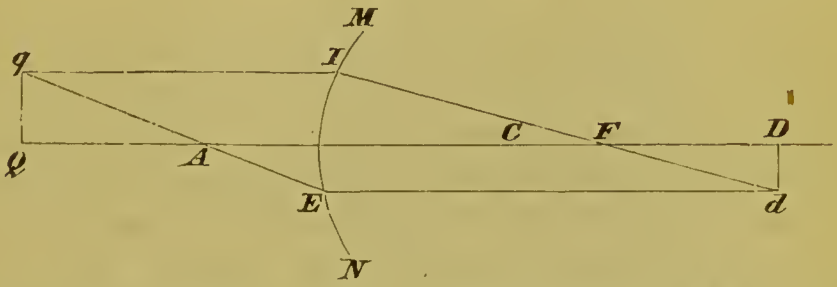
also $f = r$, das heisst, der Brennpunkt liegt um den Abstand des Radius hinter dem Scheitel der brechenden Fläche.

Da ferner die Strahlen vor der Brechung nach dem Mittelpunkte convergiren, so ist in Gleichung *(B)* Y gleich 0, somit auch $y = 0$, oder der Brennpunkt liegt im Mittelpunkte der brechenden Fläche, wie wir vorhin ableiteten.

Wie wir die Lage der Bilder von leuchtenden Objecten in dem Bisherigen durch Rechnung erhielten, so können wir sie auch durch Constructionen bestimmen, die sich aus unseren bisherigen Sätzen ergeben. Die erste sich direkt an die Rechnung anschliessende Construction ist die in Fig. 5 dargestellte. Man bestimmt durch Rechnung oder Construction (voriger §.) den Abstand f des Bildes auf der Axe, errichtet in dem gefundenen Punkte eine Senkrechte und zieht dann von dem leuchtenden Punkte aus die Nebenaxe durch den Mittelpunkt. Wo diese Nebenaxe jene Senkrechte trifft, ist der gesuchte Brennpunkt.

Anstatt der Nebenaxe kann man auch den durch den zweiten Hauptbrennpunkt gehenden Strahl benutzen. Ist q Fig. 6 der leuchtende Punkt und D der nach Gleichung (A) berechnete Abstand des Brennpunktes auf der Axe, so kann man, anstatt den Punkt d durch die Nebenaxe qCd zu bestimmen, von q aus den

Fig. 6.



mit der Axe parallelen Strahl qI ziehen; dieser Strahl geht nach der Brechung durch den zweiten Hauptbrennpunkt F, zugleich muss er aber auch durch den Bildpunkt von q gehen. Ziehen wir deshalb IF und verlängern den Strahl, bis er die Senkrechte dD in d schneidet, so ist der Punkt d der Brennpunkt von q.

Als dritte Construction kann man die Combination der Nebenaxe qCd mit diesem Strahl anführen; wo sich IFd und qCd schneiden, dort liegt der Brennpunkt von q.

Hat man den ersten Hauptbrennpunkt A bestimmt, so kann man auch diesen zur Construction benutzen, da der durch ihn gezogene Strahl qAE nach der Brechung der Hauptaxe parallel weiter geht. Zieht man deshalb Ed parallel der Axe, so ist der Punkt, wo diese Linie die Nebenaxe qCd oder den durch den zweiten Hauptbrennpunkt gehenden Strahl schneidet, der Brennpunkt von q.

Dass diese Constructionen die Lage der Bildpunkte so geben, wie wir sie aus der Rechnung ableiteten, ist leicht zu übersehen; so wird man sofort erkennen, dass wenn der leuchtende Punkt zwischen A (Fig. 6) und der brechenden Fläche liegt, die Strahlen IFd und Ed sich nicht hinter, sondern vor der brechenden Fläche schneiden, der Bildpunkt also ein virtueller wird. Es wird unnöthig sein, diese Constructionen an einzelnen Beispielen auszuführen, besonders da wir später noch darauf zurückkommen werden.

§. 4.

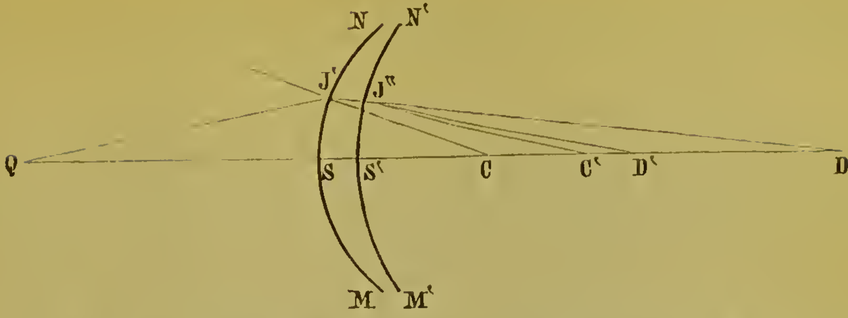
Brechung des Lichtes in einem centrirten System von zwei kugelförmigen Flächen. In dem Vorigen haben wir

den Gang der Lichtstrahlen bei der Brechung in einer kugelförmigen Fläche vollständig bestimmt, und sind dadurch in den Stand gesetzt, für jedes irgendwo vor der brechenden Fläche liegende leuchtende Object die Lage des Bildes im zweiten Mittel zu bestimmen. Mit Hülfe der erhaltenen Sätze können wir nun sofort auch die Frage nach dem Gange der Lichtstrahlen durch ein System von brechenden Flächen beantworten. Wir haben uns nur daran zu erinnern, dass die erste brechende Fläche ein dem leuchtenden Objecte ähnliches Bild von dem Objecte entwirft; dieses Bild ist dann, es mag ein reelles oder virtuelles sein, das leuchtende Object für die zweite brechende Fläche. Denn da sich die Strahlen unter allen Umständen im zweiten Mittel so fortpflanzen, dass sie sich in der That oder passend verlängert in dem ersten Bilde vereinigen, so treffen sie auch auf die zweite brechende Fläche so auf, als wenn das von der ersten entworfene Bild in der That für die zweite Fläche das leuchtende Object wäre. Wir haben daher nur die Lage des Bildes in Bezug auf die zweite brechende Fläche, das heisst, den auf der Axe gerechneten Abstand desselben vom Scheitel der zweiten Fläche und den Abstand des Bildes von der Axe zu bestimmen und dann die beiden Gleichungen *(A)* und *(B)* des vorigen §. zur Bestimmung der Lage des von der zweiten Fläche entworfenen Bildes anzuwenden. Bei einer dritten, vierten brechenden Fläche u. s. f. könnten wir dann ganz ebenso verfahren, das heisst, das von der zweiten brechenden Fläche entworfene Bild als leuchtendes Object für die dritte Fläche betrachten und wiederum durch Anwendung der beiden Gleichungen *(A)* und *(B)* des vorigen §. das von diesem durch die dritte Fläche entworfene Bild bestimmen u. s. f. Es ist jedoch bequemer, wenn wir bei mehreren brechenden Flächen anders verfahren, wenn wir dann die Flächen paarweise zusammennehmen und je zwei Flächen als ein System betrachten und dann die von dem ersten System entworfenen Bilder als leuchtende Objecte für das folgende System von zwei brechenden Flächen ansehen.

Wir werden desshalb zunächst unsere Betrachtung nur auf ein System von zwei brechenden Flächen zu beschränken haben.

Es seien zu dem Ende MN, $M'N'$, Fig. 7, zwei kugelförmige Flächen, deren Mittelpunkte in C und C' sich befinden. Der Abstand der beiden Flächen SS' sei gleich d; der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Uebergange aus dem ersten in das zweite

Fig. 7.



Mittel sei n, derjenige bei dem Durchtritt des Lichtes durch die zweite brechende Fläche, also bei dem Uebergange des Lichtes aus dem zweiten in das dritte Mittel sei gleich n'. Es sei ferner D der von der ersten brechenden Fläche entworfene Bildpunkt des leuchtenden Punktes Q, das heisst, der Bildpunkt, wenn das Licht nach der ersten Brechung in dem zweiten Mittel bliebe, also in der zweiten Fläche keine neue Brechung erführe. Der Abstand $SD = f$ dieses Bildes von dem Scheitel S der ersten brechenden Fläche ist dann nach der Gleichung *(A)* des vorigen Paragraphen gegeben durch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{na}$$

oder durch die frühere Gleichung [§. 2 Gleichung (1)]

$$f = \frac{nar}{(n-1)\,a - r} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1),$$

worin a den Abstand QS des leuchtenden Punktes vom Scheitel S und r den Radius CS der Kugel bedeutet.

Die im zweiten Mittel nach dem Punkte D convergirenden Strahlen treffen nun aber auf die zweite brechende Fläche $M'N'$ und werden in derselben neuerdings gebrochen, da hinter derselben ein anderes Mittel ist, als vor derselben; da die Strahlen aber in dem zweiten Mittel nach einem Punkte convergiren, so vereinigen sie sich auch nach der Brechung in der zweiten Fläche in einem Punkte D', dessen Abstand von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche $S'D' = f'$ wir durch dieselbe Gleichung wie f bestimmen können. Bezeichnen wir deshalb den Abstand $S'D$ des Punktes D von dem Scheitel S' der zweiten brechenden Fläche mit a', mit ϱ den Radius der zweiten brechenden Fläche, so wird

$$f' = \frac{n'a'\varrho}{(n'-1)\,a' - \varrho} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

In dieser Gleichung haben wir nur noch a' durch die bekannten Grössen a, d, r unserer Combination auszudrücken, um f' zu erhalten. Nun ist

$$a' = S'D = SD - SS' = f - d,$$

worin f durch die Gleichung (1) gegeben und d der Abstand der beiden brechenden Flächen bekannt ist. Ist nun, wie wir es in unserer Figur vorausgesetzt haben, $f > d$, so liegt der Punkt D hinter der zweiten brechenden Fläche, und um das anzudeuten, müssen wir nach dem Vorigen dieser Differenz das negative Vorzeichen geben und in die Gleichung (2) für a' einsetzen

$$a' = -(f - d) = d - f$$

oder

$$a' = d - \frac{n a r}{(n-1)\, a - r} = \frac{\left\{(n-1)\, a - r\right\} d - nar}{(n-1)\, a - r}$$

Führen wir diesen Werth in die Gleichung (2) ein, so wird

$$f' = \frac{n' \varrho \dfrac{\left\{(n-1)\, a - r\right\} d - nar}{(n-1)\, a - r}}{(n'-1) \dfrac{\left\{(n-1)\, a - r\right\} d - nar}{(n-1)\, a - r} - \varrho}$$

oder indem wir Zähler und Nenner mit dem Faktor $(n-1)\, a - r$ multipliciren

$$f' = \frac{n' \varrho \left\{(n-1)\, a - r\right\} d - n' n a \varrho r}{(n'-1)\left\{(n-1)\, a - r\right\} d - (n'-1)\, nar - (n-1)\, a\varrho + r\varrho}$$

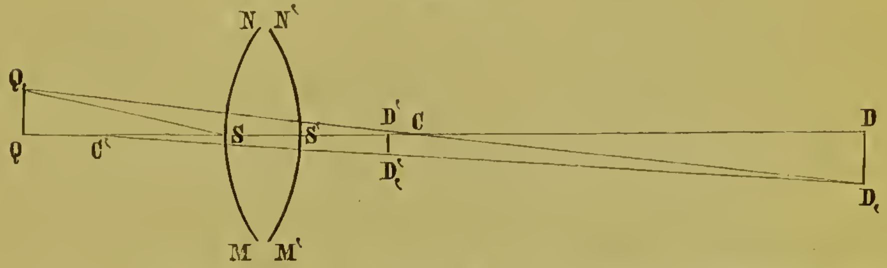
oder schliesslich, indem wir im Nenner die Glieder etwas anders ordnen und besonders die a enthaltenden Glieder zusammenziehen

$$f' = \frac{n' d \varrho \left\{(n-1)\, a - r\right\} - n' n a \varrho r}{a\left\{(n'-1)(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\varrho\right\} - (n'-1)\, rd + r\varrho} \ldots (I)$$

Dieser Ausdruck für f' gestattet den auf der Axe gerechneten Abstand des Bildpunktes von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche zu bestimmen, wenn man den auf der Axe gerechneten Abstand des leuchtenden Punktes von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche, die Radien, sowie den Abstand der brechenden Flächen und die Brechungsexponenten der verschiedenen Mittel kennt. Liegt also der leuchtende Punkt auf der Axe selbst, so ist durch diese Gleichung die Lage des Brennpunktes vollständig bestimmt. Liegt aber der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe,

oder ist das leuchtende Object eine Linie oder Ebene, so müssen wir noch den Abstand des Bildpunktes von der Axe oder die Grösse des Bildes bestimmen. Der auf der Axe gerechnete Abstand des Bildes vom Scheitel ist nämlich nach dem Vorigen auch durch diese Gleichung für f' gegeben; denn ist Q_1 Fig. 8 der leuchtende Punkt, oder $Q_1 Q$ eine leuchtende Linie oder Ebene dessen durch die erste brechende Fläche allein entworfenes Bild

Fig. 8.



DD_1 sein würde, so liegt das durch die zweite brechende Fläche von diesem entworfene Bild dort, wo der Bildpunkt des Punktes D liegt, also in dem durch die vorige Gleichung gegebenen Abstande $S'D' = f'$ vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche. Es handelt sich also nur noch darum, den Abstand des Punktes D'_1 von der Axe oder die Länge der Senkrechten $D'_1 D'$ zu bestimmen. Wir gelangen dazu durch zweimalige Anwendung der Gleichung *(B)* des vorigen Paragraphen. Bezeichnen wir die Länge von $Q_1 Q$ mit Y, die Länge von $D_1 D$ mit y, so ist y gegeben durch

$$y = -\frac{r}{(n-1)\,a - r} \cdot Y$$

Nun ist $D_1 D$ das leuchtende Object für die zweite brechende Fläche für die Grösse des Bildes, welches die zweite brechende Fläche von diesem Objecte entwirft, y', erhalten wir daher ganz ebenso

$$y' = -\frac{\varrho}{(n'-1)\,a' - \varrho} \cdot y$$

worin a' wie vorhin den Abstand DS' des Bildes DD_1 vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche bedeutet, und y durch die obige Gleichung gegeben ist. Setzen wir in den Ausdruck für y' nun den Werth von y ein, so wird

$$y' = \frac{\varrho}{(n'-1)\,a' - \varrho} \cdot \frac{r}{(n-1)\,a - r} \cdot Y$$

und wenn wir jetzt auch den Werth von a' einsetzen

$$y' = \frac{\varrho}{(n'-1)\,\dfrac{\{(n-1)\,a - r\}\,d - nar}{(n-1)\,a - r} - \varrho} \cdot \frac{r}{(n-1)\,a - r} \cdot Y$$

Führen wir nun die angedeutete Multiplication aus, indem wir Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciren, so wird

$$y' = -\frac{r\varrho}{(n'-1)\left\{(n-1)a-r\right\}d-(n'-1)nar-(n-1)a\varrho+r\varrho}\cdot Y$$

oder indem wir den Nenner etwas anders ordnen und die a enthaltenden Glieder zusammenfassen

$$y' = \frac{r\varrho}{a\left\{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n\varrho-1)\right\}-(n'-1)rd+r\varrho}\cdot Y \ldots. \text{(II)}$$

Dieser Ausdruck, dessen Nenner mit dem vorhin abgeleiteten für f' vollständig übereinstimmt, gestattet also die Lage des ausser der Axe liegenden Bildpunktes eines Punktes Q_1 oder die Grösse des Bildes einer Linie oder Ebene $Q_1 Q$ aus den bekannten Grössen unserer Combination brechender Flächen und dem Abstande und der Grösse des leuchtenden Objectes zu berechnen.

Die beiden Gleichungen (I) und (II) geben uns also vollständig Aufschluss über die Brechung des Lichtes in zwei brechenden Flächen, weil sie zusammen Lage und Grösse der Bilder vollständig bestimmen. In der angegebenen Form sind sie aber ziemlich unbequem und zur Bestimmung der Lage und Grösse der Bilder wenig geeignet. Sehr viel einfacher und übersichtlicher werden sie aber, wenn man den Abstand der beiden brechenden Flächen vernachlässigen darf, wie man es in den meisten Fällen bei Berechnung der gewöhnlichen Linsen thun darf. In dem Falle wird d gleich 0, und die mit d behafteten Glieder fallen aus den beiden Ausdrücken fort. Die Gleichung (I) wird dann

$$f' = \frac{-nn'ar\varrho}{-a\left\{(n'-1)nr+(n-1)\varrho\right\}+r\varrho}$$

oder wenn wir in Zähler und Nenner die Zeichen ändern

$$f' = \frac{nn'ar\varrho}{a\left\{(n'-1)nr+(n-1)\varrho\right\}-r\varrho}$$

und die Gleichung (II) wird

$$y' = -\frac{r\varrho}{a\left\{(n'-1)nr+(n-1)\varrho\right\}-r\varrho}\cdot Y = -\frac{f'}{nn'a}\cdot Y.$$

Führen wir anstatt des Werthes f' seinen reciproken Werth ein, so wird

$$\frac{1}{f'} = (n'-1)\cdot\frac{1}{n'\varrho}+(n-1)\frac{1}{nn'r}-\frac{1}{nn'a}.$$

Definiren wir nun die Hauptbrennweiten ebenso wie früher, als erste Hauptbrennweite den Abstand des leuchtenden Punktes vom

Scheitel der ersten brechenden Fläche, dessen Strahlen nach der Brechung in beiden Flächen der Axe parallel werden, und als zweite Hauptbrennweite den Abstand des Brennpunktes für Strahlen, welche im ersten Mittel der Axe parallel sind, so erhalten wir zunächst die zweite Hauptbrennweite F', wenn wir in der letzten Gleichung

$$a = \infty; \quad \frac{1}{nn'a} = 0$$

setzen, somit

$$\frac{1}{F'} = (n'-1) \cdot \frac{1}{n'\varrho} + (n-1)\,\frac{1}{nn'r}.$$

Das von a unabhängige Glied in der Gleichung für $\frac{1}{f'}$ ist also der reciproke Werth der zweiten Hauptbrennweite, und dadurch wird

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{F'} - \frac{1}{nn'a}.$$

Wir erhalten also eine der Gleichung *(A)* für eine brechende Fläche ganz analoge Gleichung auch für ein System von zwei brechenden Flächen.

Die erste Hauptbrennweite A' erhalten wir, wenn wir in der Gleichung für $\frac{1}{f'}$ einsetzen

$$f' = \infty; \frac{1}{f'} = 0;$$

somit

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{nn'A}; \; A = \frac{F}{nn'}.$$

Zwischen den beiden Hauptbrennweiten besteht also ebenfalls eine analoge Beziehung wie bei einer brechenden Fläche. Ja beachten wir, dass das Produkt der beiden Brechungsexponenten nn' gleich ist dem Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange des Lichtes direkt in das dritte Mittel, so tritt diese Analogie noch mehr hervor; wir erhalten dann den Satz, dass die zweite Hauptbrennweite gleich ist dem Produkte der ersten Hauptbrennweite und dem Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus dem ersten in das dritte Mittel.

Aus diesen einfachen Gleichungen ergeben sich nun ähnliche Constructionen für die Lage der Bilder, wie wir sie bei einer brechenden Fläche erhalten haben; wir werden indess diese Constructionen erst an einer anderen Stelle besprechen, wenn wir

ohne die ungenaue Annahme, welche wir jetzt gemacht haben, zu ähnlichen einfachen Gleichungen gekommen sind.

§. 5.

Ableitung der Hauptpunkte. Die am Schlusse des vorigen Paragraphen zur Vereinfachung der Gleichungen für f' und y' gemachte Annahme ist nur dann zulässig, wenn der Abstand der brechenden Flächen gegen die übrigen Dimensionen, die Radien der brechenden Flächen, die Abstände der leuchtenden Objecte und Bilder verschwindend klein ist. Bei der Dioptrik des Auges, in welchem die Abstände der einzelnen brechenden Flächen die Hälfte und mehr der Krümmungsradien betragen, darf diese Annahme nicht gemacht werden. Indessen lassen sich auch hier anstatt der complicirten Ausdrücke (I) und (II) ohne jene ungenaue Annahme eben so einfache Gleichungen erhalten, wenn man die Abstände des leuchtenden Objectes und des Bildes nicht von den Scheiteln der brechenden Flächen, sondern von zwei andern Punkten aus rechnet. Diese Punkte, welche von Gauss in die Dioptrik eingeführt worden sind, heissen die Hauptpunkte; die durch diese Punkte senkrecht zur Axe gelegten Ebenen heissen die Hauptebenen.

Die Lage der Hauptpunkte und Hauptebenen ist durch folgende Definitionen gegeben.

Der zweite Hauptpunkt ist das Bild des ersten, das heisst, befindet sich in dem ersten Hauptpunkte ein leuchtender Punkt, so liegt sein Bild im zweiten Hauptpunkte.

Ein leuchtender Punkt in der ersten Hauptebene hat sein Bild in der zweiten Hauptebene, und zwar liegt dasselbe an derselben Seite und ebenso weit von der Axe entfernt als der leuchtende Punkt in der ersten Hauptebene.

Letzterer Satz gibt uns nun sofort das Mittel, um den ersten Hauptpunkt durch seinen Abstand vom Scheitel der ersten brechenden Fläche zu bestimmen. Denn bezeichnen wir wie vorhin mit Y den Abstand eines leuchtenden Punktes von der Axe in der ersten Hauptebene, mit y' den Abstand des Bildes von der Axe in der zweiten Hauptebene, so muss nach dem soeben angeführten Satze

$$y' = Y; \frac{y'}{Y} = 1$$

sein. Zwischen y' und Y besteht aber andererseits die Gleichung

(II) des vorigen Paragraphen oder

$$\frac{y'}{Y} = \frac{r\varrho}{h'\{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho\}-(n'-1)rd+r\varrho}$$

wenn wir mit h' den Abstand des ersten Hauptpunktes von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche bezeichnen.

Aus diesen letzten beiden Gleichungen folgt dann, indem wir den Werth von $\frac{y'}{Y}$ gleich 1 setzen:

$$1 = \frac{r\varrho}{h'\{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho\}-(n'-1)rd+r\varrho}$$

oder, indem wir auf beiden Seiten mit dem Nenner der rechten Seite multipliciren

$$h'\{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho\}-(n'-1)rd+r\varrho=r\varrho.$$

Daraus folgt, indem wir auf beiden Seiten $r\varrho$ abziehen und das nicht mit h' behaftete Glied auf die andere Seite bringen

$$h'\{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho\}=(n'-1)rd$$

und schliesslich, indem wir durch den Coefficienten von h' dividiren

$$h' = \frac{(n'-1)rd}{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho}$$

Ein in diesem Abstande von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche befindliches leuchtendes Object hat somit ein Bild, welches genau ebenso gross ist und an derselben Seite der Axe liegt, wie das leuchtende Object selbst; der in diesem Abstande von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche auf der Axe selbst liegende Punkt ist somit der erste Hauptpunkt.

Den zweiten Hauptpunkt erhalten wir nun mit Hülfe des ersten Theiles unserer Definition, der zweite Hauptpunkt ist das Bild des ersten. Setzen wir daher in unsere Gleichung (I) für a diesen Werth, so erhalten wir den Abstand f', wir wollen ihn h'' nennen, des zweiten Hauptpunktes von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche, denn wir erhalten dann den Abstand des Bildes jenes Punktes von der zweiten Fläche, welcher von der ersten Fläche um h' entfernt ist, also des Bildes des ersten Hauptpunktes. Die Gleichung (I) ist, wenn wir im Zähler und Nenner die a enthaltenden Glieder zusammenschreiben

$$f' = \frac{a\{(n-1)n'd\varrho-nn'r\varrho\}-n'dr\varrho}{a\{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho\}-(n'-1)rd+r\varrho}$$

und wenn wir jetzt für a den Werth h' einsetzen (Formel [1])

Bringen wir nun Zähler und Nenner auf der rechten Seite auf gleiche Benennung und lassen dann im Nenner und Zähler die gleichen Nenner fort, so wird (Formel [2])

Führen wir nun im Zähler die angedeuteten Multiplicationen aus, und lassen die gleichen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Glieder fort, so wird

$$h'' = \frac{(n-1)\, n' d \varrho r \varrho}{r\varrho \left\{(n'-1)(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho\right\}}$$

oder schliesslich, da im Zähler und Nenner der Factor $r\varrho$ fortfällt,

$$h'' = \frac{(n-1)\, n'\, d\varrho}{(n'-1)\,(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho}$$

für den Abstand des zweiten Hauptpunktes von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche.

Wie man sieht, hängt die Lage der Hauptpunkte ab von den Brechungsexponenten der verschiedenen Mittel, dem Abstande und den Radien der brechenden Flächen.

Um die Lage der Hauptpunkte zu übersehen, wollen wir die allgemeinen Gleichungen auf einzelne specielle Fälle anwenden. Wir wollen zunächst eine biconvexe Glaslinse betrachten in der Luft, der Brechungsexponent des Glases sei 1,5, die Radien beider Flächen seien gleich gross und der Abstand ihrer Scheitel, also die Dicke der Linse sei 0,1 des Radius. In unsere Gleichung für den ersten Hauptpunkt

$$h' = \frac{(n'-1)\, rd}{(n'-1)\,(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho}$$

haben wir dann nur die oben angegebenen Werthe einzusetzen.

(Formel 1.)

$$h'' = \frac{\dfrac{(n'-1)\, rd}{(n'-1)(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho}\left\{(n-1)\, n' d\varrho - n n' r\varrho\right\} - n' dr\varrho}{\dfrac{(n'-1)\, rd}{(n'-1)(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho}\left\{(n'-1)(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho\right\} - (n'-1)\, rd + r\varrho}$$

(Formel 2.)

$$h'' = \frac{(n'-1)\, rd\left\{(n-1)\, n' d\varrho - nn' r\varrho\right\} - n' dr\varrho\left\{(n'-1)(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho\right\}}{\left\{(n'-1)\, rd - (n'-1)\, rd + r\varrho\right\}\left\{(n'-1)(n-1).d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho\right\}}$$

Da die Linse eine biconvexe ist, so wendet die zweite Fläche dem Lichte jedenfalls die concave Seite zu, wir haben daher nach §. 2 in unseren Gleichungen demselben das negative Vorzeichen zu geben. Da wir nun annehmen, die beiden Radien seien an Grösse einander gleich, so ist:

$$\varrho = - r.$$

Der Brechungsexponent n ist gleich 1, 5. Da vor und hinter der Linse dasselbe Mittel, nämlich Luft ist, so ist der Brechungsexponent $n' = \frac{1}{n}$, da der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Uebergange aus Glas in Luft der reciproke Werth desjenigen bei dem Uebergange aus Luft in Glas ist. Setzen wir diese Werthe und zugleich im Nenner für d den Werth 0,1 r ein, so wird

$$h' = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right) r d}{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n-1)\, 0{,}1\, r - \left(\frac{1}{n} - 1\right) nr + (n-1)\, r}$$

$$h' = \frac{(1 - n)\, rd}{(1 - n)(n - 1)\, 0{,}1\; r - (1 - n)\, nr + (n - 1)\, n r}$$

oder wenn wir Zähler und Nenner durch $(1 - n)\, r$ dividiren

$$h' = \frac{d}{(n - 1)\,.\,0{,}1 - 2n} = - \frac{d}{2\,n - (n - 1)\,.\,0{,}1}$$

und wenn wir jetzt $n = 1, 5$ setzen

$$h' = - \frac{d}{3 - 0{,}05} = - \frac{d}{2{,}95}$$

Der erste Hauptpunkt liegt also, da das Vorzeichen auf der rechten Seite negativ ist, um fast $\frac{1}{3}$ der Linsendicke hinter dem Scheitel der ersten Fläche.

Für den zweiten Hauptpunkt haben wir

$$h'' = \frac{(n-1)\, n' d \varrho}{(n' - 1)(n-1)\, d - (n' - 1) nr - (n-1)\, \varrho}$$

und indem wir $\varrho = - r$, $n' = \frac{1}{n}$, im Nenner $d = 0{,}1\, r$ setzen

$$h'' = - \frac{(n - 1)\, dr}{(1 - n)(n - 1)\, 0{,}1\, r - (1 - n)\, nr + (n - 1)\, nr}$$

und indem wir durch $(n - 1)\, r$ dividiren

$$h'' = - \frac{d}{(1 - n)\,.\,0{,}1 + 2\,n} = - \frac{d}{2n - (n - 1)\, 0{,}1}$$

$$h'' = -\frac{d}{2,95}$$

Der zweite Hauptpunkt liegt also um fast $^1/_3$ der Linsendicke vor der zweiten brechenden Fläche, da auch hier der Ausdruck auf der rechten Seite das negative Vorzeichen hat.

Beide Hauptpunkte liegen also im Innern der Linse; das ist jedoch nicht immer der Fall, sondern je nach den Verhältnissen der brechenden Flächen und der Brechungsexponenten wird die Lage eine andere. Nehmen wir z. B. eine concavconvexe Linse von demselben Glase, bei der der Radius der concaven Fläche doppelt so gross ist als der Radius der convexen Fläche. Nehmen wir an, die Linse wende dem ankommenden Lichte ihre convexe Seite zu, so wird auch die zweite Fläche auf ihrer convexen Seite von dem ankommenden Lichte getroffen, es ist also ϱ positiv und zwar

$$\varrho = 2r,$$

alle übrigen Grössen bleiben ungeändert wie in dem eben angenommenen Falle. Setzen wir nun die Werthe in unsere Gleichungen für h' und h'' ein, so wird

$$h' = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right) rd}{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n-1)\,0{,}1r - \left(\frac{1}{n} - 1\right) nr - (n-1)\,2r} = \frac{d}{n + 0{,}1\,(n-1)}$$

$$h' = \frac{d}{1,55}$$

und der Abstand des zweiten Hauptpunktes vom zweiten Scheitel

$$h'' = \frac{(n-1)\,d\,.\,2r}{(1-n)(n-1)\,0{,}1\,r - (1-n)\,nr - (n-1)\,2nr}$$

$$h'' = -\frac{d\,.\,2}{n + 0{,}1\,(n-1)} = -\frac{2d}{1,55}.$$

Da der Werth von h' positiv ist, so folgt, dass der erste Hauptpunkt vor dem Scheitel der ersten brechenden Fläche liegt und zwar um ungefähr $^2/_3$ der Linsendicke. Der Werth von h'' ist negativ, der zweite Hauptpunkt liegt also vor der zweiten brechenden Fläche und da der Werth von h'' grösser als d ist selbst vor der ersten Fläche und zwar um fast genau $^1/_3$ der Linsendicke vor der ersten Fläche. Es liegen also in diesem Falle beide Hauptpunkte vor den brechenden Flächen im ersten Mittel.

Ebenso wie von den Krümmungsradien der brechenden Flächen, so hängt die Lage der Hauptpunkte auch von den Brechungsexponenten ab. Nehmen wir, um das zu zeigen, die letzte Linse, setzen aber voraus, hinter derselben wäre nicht wie vor derselben Luft, sondern Wasser. In unsern Gleichungen bedeutet dann n' den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus Glas in Wasser. Der Brechungsexponent des Lichtes beim Uebergange aus Luft in Wasser ist fast genau gleich $^4/_3$; da nun der Brechungsexponent aus Luft in Glas nach unserer Annahme $^3/_2$ ist, so folgt für den Brechungsexponenten des Lichtes beim Uebergange von Glas in Wasser nach §. 1

$$n' = {}^4/_3 : {}^3/_2 = {}^8/_9.$$

Setzen wir diesen Werth von n' in unsere Gleichungen ein, so erhalten wir für h' und h'' die Werthe

$$h' = \frac{d}{7,55} \qquad h'' = -\frac{8\,d}{7,55}.$$

Auch dann noch liegen also die beiden Hauptpunkte vor der ersten brechenden Fläche, aber viel näher bei derselben, als wenn hinter der zweiten Fläche Luft wäre.

An diesen Beispielen möge es genügen, um zu erkennen, wie die Lage der Hauptpunkte von der Beschaffenheit der brechenden Flächen und den Brechungsexponenten der Mittel abhängig ist. Nur sei hier noch erwähnt, dass aus diesen Gleichungen ebenfalls sich ergibt, dass bei einer einzigen brechenden Fläche die beiden Hauptpunkte zusammen und in den Scheitel der brechenden Fläche fallen. Denn die eine brechende Fläche können wir als zwei betrachten, deren Radien r und ϱ einander gleich sind und deren Abstand d gleich Null ist. Setzen wir aber diese Werthe in die Gleichungen für h' und h'' ein, so wird

$$h' = h'' = 0.$$

Es ergibt sich das übrigens auch direkt, wenn man nach den im Eingange dieses Paragraphen aufgestellten Bedingungen die Hauptpunkte für eine brechende Fläche aus den für dieselbe aufgestellten Gleichungen berechnet.

§. 6.

Vereinfachung der Gleichungen durch Einführung der Hauptpunkte. Die Hauptpunkte haben wir deshalb be-

stimmt, um mit Hülfe derselben die complicirten Ausdrücke, die wir zur Bestimmung der Lage und Grösse der Bilder, welche brechende Flächen von vor ihnen befindlichen leuchtenden Objecten entwerfen, erhielten, zu vereinfachen. Es geschieht das sofort, wenn wir die Abstände der leuchtenden Objecte einerseits anstatt vom Scheitel der ersten Fläche von dem ersten Hauptpunkte an rechnen und andererseits nicht den Abstand des Bildes auf der Axe vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche, sondern den von dem zweiten Hauptpunkte berechnen.

Bedenken wir nun, dass ein positiver Werth von h' bedeutet, dass der erste Hauptpunkt vor dem Scheitel der ersten brechenden Fläche liegt, so ergibt sich, dass der auf der Axe gerechnete Abstand des leuchtenden Objectes von dem ersten Hauptpunkte gleich ist der Differenz zwischen dem Abstande des leuchtenden Objectes vom ersten Scheitel und dem Abstande des ersten Hauptpunktes vom Scheitel. Nennen wir also wie früher a den Abstand des leuchtenden Objectes vom Scheitel, h' den Abstand des ersten Hauptpunktes von demselben und a' den Abstand des leuchtenden Objectes vom ersten Hauptpunkte, so ist

$$a' = a - h'; \quad a = a' + h'.$$

Ein positiver Werth von h'' bedeutet, dass der zweite Hauptpunkt hinter dem zweiten Scheitel liegt; die auf der Axe gerechnete Entfernung des Bildes vom zweiten Hauptpunkte ist also gleich der Differenz zwischen dem Abstande des Bildes und des Hauptpunktes vom zweiten Scheitel. Nennen wir nun den Abstand des Bildes vom Scheitel wie früher f', denjenigen des Bildes vom zweiten Hauptpunkte f, so ist

$$f = f' - h''.$$

Um demnach die Abstände der leuchtenden Objecte und ihrer Bilder von den Hauptpunkten aus zu rechnen, haben wir in Gleichung I des §. 4 den Abstand a durch $a' + h'$ auszudrücken und statt f' den Abstand $f' - h''$ zu berechnen. Darnach wird

$$f = f' - h'' = \frac{\{a'+h'\}\{(n-1)n'd\varrho - nn'r\varrho\} - n'dr\varrho}{\{a'+h'\}\{(n'-1)(n-1)d - (n'-1)nr - (n-1)\varrho\} - (n'-1)rd + r\varrho} - h''$$

und indem wir jetzt h' und h'' durch die im vorigen Paragraph gefundenen Werthe ausdrücken

$$f = \frac{\left\{a' + \frac{(n'-1)\,rd}{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho}\right\}\left\{(n-1)\,n'd\varrho - nn'r\varrho\right\} - n'dr\varrho}{\left\{a' + \frac{(n'-1)\,rd}{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho}\right\}\left\{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho\right\} - (n'-1)\,rd + r\varrho} - \frac{(n-1)\,n'd\varrho}{(n'-1)(n-1)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho}$$

Um diesen Ausdruck bequemer auf seine einfachste Form zu bringen, wollen wir zunächst den Nenner in den Werthen für h' und h'' mit D bezeichnen, also unsere Gleichung schreiben

$$f = \frac{\left\{a' + \frac{(n'-1)\,rd}{D}\right\}\left\{(n-1)\,n'd\varrho - nn'r\varrho\right\} - n'dr\varrho}{\left\{a' + \frac{(n'-1)\,rd}{D}\right\}.\,D - (n'-1)\,rd + r\varrho} - \frac{(n-1)\,n'd\varrho}{D}$$

Bringen wir die Quotienten der rechten Seite auf gleiche Benennung und bedenken dabei, dass der Nenner des ersten Quotienten sich zusammenzieht in

$$a'D + r\varrho$$

so erhalten wir

$$f = \frac{D\left\{a' + \frac{(n'-1)rd}{D}\right\}\left\{(n-1)n'd\varrho - nn'r\varrho\right\} - n'dr\varrho D - \left\{a'D + r\varrho\right\}(n-1)\,n'd\varrho}{\left\{a'D + r\varrho\right\}\,D}$$

Führen wir im Zähler die angedeuteten Multiplicationen aus, so wird derselbe

$$a'D.(n-1)\,n'd\varrho - a'D.nn'r\varrho + (n'-1)\,rd(n-1)n'd\varrho -$$
$$(n'-1)rd.nn'r\varrho - n'dr\varrho\,D - a'D(n-1)\,n'd\varrho - r\varrho(n-1)\,n'd\varrho$$

In diesem Ausdrucke heben sich die zweimal unterstrichenen Glieder auf, die einmal unterstrichenen lassen sich zusammenziehen in

$$n'dr\varrho\left\{(n'-1)(n-1)d - (n'-1)nr - (n-1)\varrho\right\} = n'dr\varrho\,D$$

Diese drei Glieder heben sich somit gegen das dreimal unterstrichene Glied auf, es bleibt daher vom Zähler nur das Glied

$$-\,a'nn'r\varrho.\;D.$$

Darnach wird

$$f = -\frac{a'nn'r\varrho\,D}{\left\{a'D + r\varrho\right\}D} = -\frac{a'nn'r\varrho}{a'D + r\varrho}$$

und wenn wir jetzt für D wieder seinen Werth einsetzen

$$f = -\frac{a' n n' r \varrho}{a' \{(n'-1)(n-1)d - (n'-1)nr - (n-1)\varrho\} + r\varrho}$$

und wenn wir schliesslich, um das negative Vorzeichen fortzuschaffen, im Nenner alle Vorzeichen in die entgegengesetzten verändern

$$f = \frac{a' n n' r \varrho}{a' \{(n'-1)nr + (n-1)\varrho - (n'-1)(n-1)d\} - r\varrho}. \qquad \text{Ia}$$

Ganz ebenso vereinfacht sich unser Ausdruck für den Abstand des Bildes eines ausser der Axe liegenden leuchtenden Punktes von der Axe oder die Grösse des Bildes eines ausgedehnten leuchtenden Objectes, wenn wir in demselben den Abstand des leuchtenden Objectes vom ersten Hauptpunkte einführen. Unser Ausdruck war

$$y = \frac{r\varrho}{a\{(n'-1)(n-1)d - (n'-1)nr - (n-1)\varrho\} - (n'-1)rd + r\varrho} \cdot Y$$

und setzen wir

$$a = a' + h' = a' + \frac{(n'-1)\, rd}{(n'-1)(n-1)d - (n'-1)nr - (n-1)\varrho}$$

so zieht sich gerade wie vorhin der erste Nenner auch hier der Nenner zusammen, und es wird

$$y = \frac{r\varrho}{a'\{(n'-1)(n-1)d - (n'-1)nr - (n-1)\varrho\} + r\varrho} \cdot Y$$

oder um den Nenner des Ausdruckes für y mit dem für f gleich zu machen

$$y = -\frac{r\varrho}{a'\{(n'-1)nr + (n-1)\varrho - (n'-1)(n-1)d\} - r\varrho} \cdot Y. \qquad \text{IIa}$$

Vergleicht man nun den Coefficienten von Y in der Gleichung IIa mit dem in Gleichung Ia gegebenen Werthe von f, so sieht man sofort, dass wir hier für die Grösse des Bildes einen ebenso einfachen Ausdruck haben, wie bei einer brechenden Fläche, oder wie bei zwei brechenden Flächen unter Vernachlässigung ihres Abstandes. Es wird nämlich

$$y = -\frac{f}{nn'a'} \cdot Y.$$

Den Ausdruck für f können wir noch bedeutend vereinfachen durch Einführung der Hauptbrennweiten. Für den reciproken Werth von f erhalten wir zunächst

$$\frac{1}{f} = \left\{\frac{n'-1}{n'} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{nn'} \cdot \frac{1}{r} - \frac{(n'-1)(n-1)}{nn'} \cdot \frac{d}{r\varrho}\right\} - \frac{1}{nn'a'}$$

Definiren wir jetzt die zweite Hauptbrennweite F als den Abstand des zweiten Hauptbrennpunktes, also des Punktes, in welchem sich die vor der Brechung mit der Axe parallelen Strahlen nach der Brechung schneiden, von dem zweiten Hauptpunkte, so haben wir in der letzten Gleichung zur Bestimmung derselben nur einzusetzen

$$a' = \infty \qquad \frac{1}{nn'a'} = 0$$

und erhalten dann

$$\frac{1}{F} = \left\{\frac{n'-1}{n'} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{nn'} \cdot \frac{1}{r} - \frac{(n'-1)(n-1)}{nn'} \cdot \frac{d}{r\varrho}\right\}.$$

Es ist also auch hier das von a' unabhängige Glied in der Gleichung für $\frac{1}{f}$ der reciproke Werth der zweiten Hauptbrennweite.

Führen wir dieselbe in unsere Gleichung ein, so wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{nn'a},$$

wenn wir jetzt, um die Buchstaben nicht unnütz zu accentuiren, mit a den Abstand des leuchtenden Objectes von dem ersten Hauptpunkte bezeichnen.

Der Werth der ersten Hauptbrennweite, das heisst der Abstand des leuchtenden Punktes vom ersten Hauptpunkte, dessen Strahlen nach der Brechung im letzten Mittel der Axe parallel werden, erhalten wir, wenn wir in unserer Gleichung

$$f = \infty \qquad \frac{1}{f} = 0$$

setzen, somit

$$\frac{1}{nn'A} = \frac{n'-1}{n'} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{nn'} \cdot \frac{1}{r} - \frac{(n'-1)(n-1)}{nn'} \cdot \frac{d}{r\varrho} = \frac{1}{F}$$

und daraus

$$A = \frac{F}{nn'},$$

also auch jetzt wieder ist die erste Hauptbrennweite gleich dem Quotienten aus der zweiten und dem Produkte der beiden Brechungsexponenten. Ist demnach hinter der zweiten brechenden Fläche dasselbe Mittel, wie vor der ersten Fläche, so ist die erste Hauptbrennweite gleich der zweiten, da dann $nn' = 1$, somit

$$A = F$$

ist. Mit Hülfe des Werthes von A können wir aus der Gleichung für f eine ebensolche Gleichung ableiten, wie wir sie in §. 2 zur Construction der Brennweiten benutzten. Multipliciren wir nämlich die Gleichung für $\frac{1}{f}$ mit F, so wird

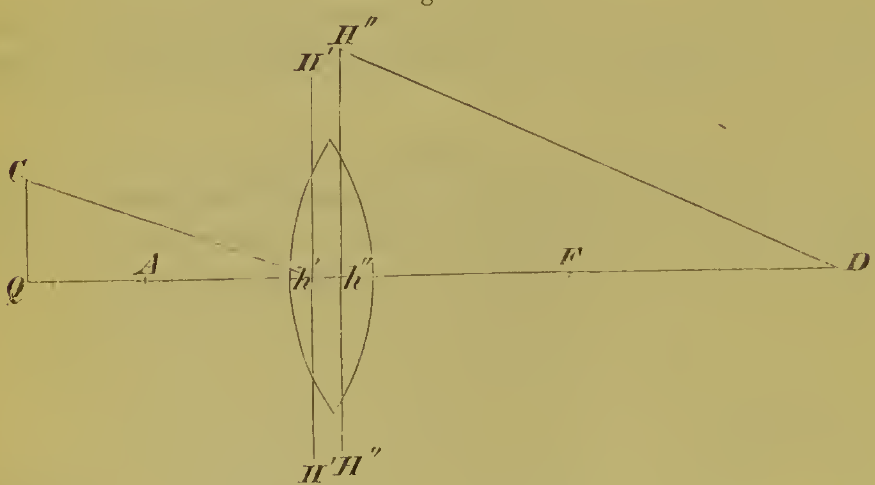
$$\frac{F}{f} = 1 - \frac{F}{nn'a}; \quad \frac{F}{f} + \frac{A}{a} = 1$$

und daraus gerade wie in §. 2

$$f = \frac{a \, . \, F}{a - A}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich ebensolche Constructionen zur Bestimmung der Brennweiten und Bilder bei zwei brechenden Flächen, wie wir sie in den §§. 2 und 3 für eine brechende Fläche entwickelten. Zunächst ergibt sich, wenn man die beiden Hauptbrennweiten kennt, wie gesagt eine Construction für f wie in §. 2. Sind nämlich Fig. 9 $H'H'$ und $H''H''$ die beiden

Fig. 9.



Hauptebenen, in denen h' und h'' die Hauptpunkte sind, ist A der erste, F der zweite Hauptbrennpunkt, ist ferner Q ein auf der

Axe liegender leuchtender Punkt, so hat man zur Bestimmung des Brennpunktes D von Q in Q nur $QC = QA$ senkrecht zur Axe zu ziehen, C mit h' zu verbinden, dann in der zweiten Hauptebene $h''H''$ gleich der zweiten Hauptbrennweite zu machen und $H''D \parallel Ch'$ zu ziehen. Der Punkt D, in welchem die Axe von dieser Parallelen getroffen wird, ist dann der Brennpunkt von Q, denn es ist

$$QC : Qh' = h''H'' : h''D$$

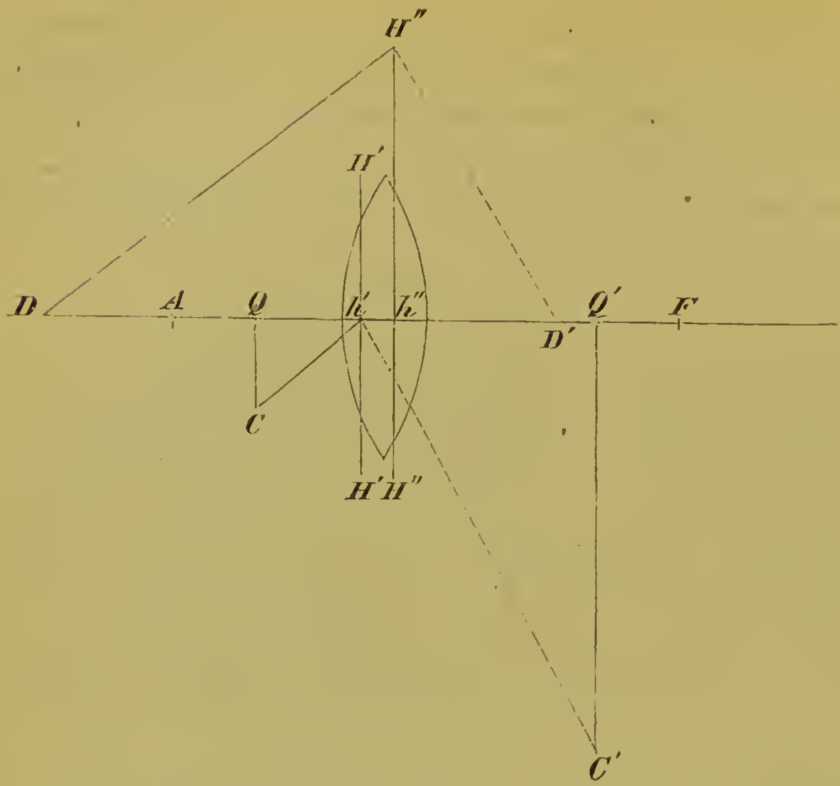
$$h''D = \frac{Qh' \,.\, h''H''}{QC} = \frac{a \,.\, F}{a - A} = f.$$

Mit Hülfe dieser Construction lässt sich noch bequemer wie durch Rechnung sofort übersehen, wie sich die Lage der Brennpunkte mit der Lage der leuchtenden Punkte ändert. Betrachten wir zunächst eine Sammellinse, etwa eine biconvexe Glaslinse, wie Fig. 9, vor der wir uns Luft denken und hinter derselben Wasser. Für diese sind die beiden Hauptbrennweiten positiv, das heisst, der erste Hauptbrennpunkt liegt im ersten, der zweite im letzten Mittel. Wenn in diesem Falle der Punkt Q Fig. 9 weiter hinausrückt, so nehmen QC und Qh' beide zu, QC aber etwas rascher als Qh', deshalb wird Ch' und damit $H''D$ mehr gegen die Axe geneigt, der Brennpunkt D von Q rückt deshalb dem Hauptbrennpunkt immer näher, bis er ihn erreicht, wenn der leuchtende Punkt Q in unendliche Entfernung rückt. Denn wenn Q unendlich weit entfernt ist, ist $QC = Qh'$, da beide Entfernungen dann unendlich gross sind. Das Dreieck CQh' wird dann also gleichschenklig und deshalb auch das Dreieck $H''h''D$. Da nun $h''H'' = F$, so wird auch $h''D = F$, oder D fällt in den zweiten Hauptbrennpunkt.

Rückt der Punkt Q näher an A, so wird QC immer kleiner, es nähert sich dem Werthe Null, während Qh' sich dem Werthe A nähert. Deshalb wird Ch' der Axe immer mehr parallel, bis es, wenn Q in A fällt, $QC = 0$ ist, mit Ah' zusammenfällt. Das mit Ch' parallele $H''D$ wird daher immer weniger gegen die Axe geneigt, der Punkt D rückt immer weiter fort, bis er in's Unendliche fällt, wenn Q in A liegt, Ch' mit Qh' zusammenfällt und $H''D$ demnach der Axe parallel wird.

Rückt Q noch näher an h', wird also $a - A$ negativ, so müssen wir die Differenz $A - a$ in dem leuchtenden Punkte senkrecht nach unten ziehen, wie in Fig. 10 QC, da das negative

Fig. 10.



Vorzeichen bedeutet, dass die Linie QC die entgegengesetzte Richtung hat wie in den früheren Fällen. Damit wird auch die Neigung der Linie Ch' gegen die Axe entgegengesetzt der früheren, und deshalb liegt auch $H''D$ an der andern Seite der zweiten Hauptebene und der Brennpunkt D liegt vor derselben, er ist ein virtueller geworden, das heisst, die Strahlen vereinigen sich nach der Brechung nicht wirklich, sondern sie pflanzen sich so fort, als kämen sie von einem vor der zweiten Hauptebene liegenden Punkte her. Je näher Q dem ersten Hauptpunkte rückt, um so näher rückt D dem zweiten, um, wenn Q in h' fällt, in h'' zu fallen. Denn dann ist QC parallel der zweiten Hauptebene, da es ganz in der ersten liegt, deshalb liegt auch $H''D$ in der zweiten Hauptebene und schneidet die Axe im zweiten Hauptpunkte.

Rückt der leuchtende Punkt über den ersten Hauptpunkt hinaus, wird er also ein virtueller, so hat man im Punkte Q' (Fig. 10) z. B. $Q'C' = a + A$ nach unten hin senkrecht zur Axe zu ziehen, da dann auch a negativ wird, unsere Gleichung für F also wird

$$f : F = -a : -(a + A).$$

Da dann, eben weil auch a negativ wird, die Neigung von

Ch' wieder die entgegengesetzte ist, so fällt auch D' wieder hinter die zweite Hauptebene, um, wenn $-a$ bis unendlich wächst, bis zum zweiten Hauptbrennpunkt vorzurücken; denn erst dann, wenn $-a$ gleich unendlich wird, ist das Dreieck $h'Q'C'$ wieder gleichschenklig, bis dahin muss $f < F$ sein.

Ebenso wie für Sammellinsen ergibt uns diese Construction die Lage der Brennpunkte für die zweite Gattung von Linsen, für Zerstreuungslinsen. Zerstreuungslinsen sind solche, welche negative Hauptbrennweiten haben, die also parallel mit der Axe einfallende Strahlen so brechen, dass sie nach der Brechung von einem vor der Linse liegenden Punkte herzukommen scheinen, und welche Strahlen, die vor der Brechung nach einem hinter der Linse liegenden Punkte convergiren, zur Axe parallel brechen. Eine solche Linse würde z. B. eine biconcave Glaslinse sein, vor der Luft und hinter der Wasser wäre. Für die zweite Hauptbrennweite hatten wir nämlich vorhin

$$\frac{1}{F} = \left\{\frac{n' - 1}{n'} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{n - 1}{nn'} \cdot \frac{1}{r} - \frac{(n' - 1)(n - 1)}{nn'} \cdot \frac{d}{r\varrho}\right\}.$$

Setzen wir nun bei einer solchen Linse voraus, die Radien beider Flächen seien gleich, so ist der Radius der ersten Fläche negativ zu setzen, da diese dem ankommenden Lichte ihre concave Seite zuwendet, während der Radius der zweiten Fläche positiv zu setzen ist. Demnach wird

$$\frac{1}{F} = \frac{n' - 1}{n'} \cdot \frac{1}{r} - \frac{n - 1}{nn'} \cdot \frac{1}{r} + \frac{(n' - 1)(n - 1)}{nn'} \cdot \frac{d}{r^2}.$$

Nehmen wir nun die Dicke der Linse gleich $0{,}1\, r$ und setzen für n und n' die Glas und Wasser entsprechenden Werthe ein, so wird

$$\frac{1}{F} = \frac{{}^8/_9 - 1}{{}^8/_9} \cdot \frac{1}{r} - \frac{{}^3/_2 - 1}{{}^4/_3} \cdot \frac{1}{r} + \frac{({}^8/_9 - 1)({}^3/_2 - 1)}{{}^4/_3} \cdot \frac{0{,}1}{r}$$

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{8r} - \frac{3}{8r} - \frac{1}{24\,r}; \quad F = -\frac{24}{13} \cdot r$$

Daraus ergibt sich für A

$$A = \frac{F}{nn'} = \frac{3\,F}{4} = -\frac{18}{13}\,r.$$

Beide Hauptbrennweiten sind also negativ; das ist, wie man sieht, immer der Fall, wenn $n > 1 > n'$ und r negativ, ϱ positiv oder unendlich oder negativ und grösser als r ist.

In unserer allgemeinen Gleichung für:

$$f = \frac{a\,F}{a - A}$$

sind dann die Werthe von F und A mit dem negativen Vorzeichen versehen; bezeichnen wir diese Werthe mit F_1 und A_1, so ist

$$A = -A_1; \qquad F = -F_1$$

und damit wird

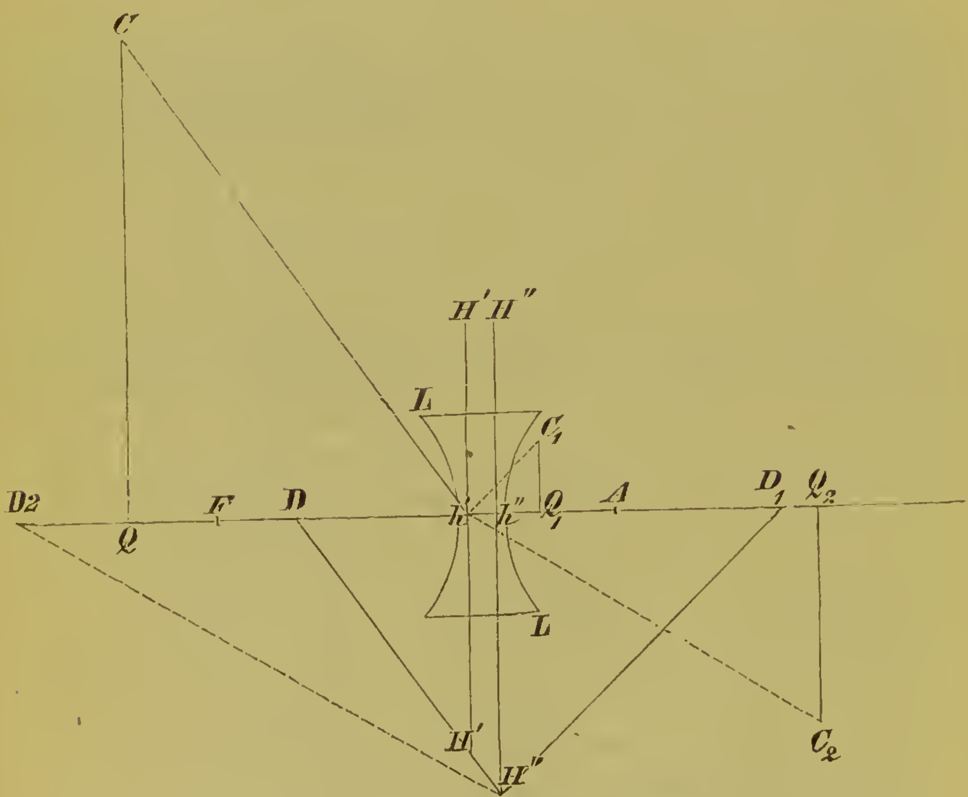
$$f = \frac{-\,a\,F_1}{a + A_1}$$

oder in Form der Proportion geschrieben

$$f : -F_1 = a : a + A_1 .$$

Die Construction, welche sich hieraus ergibt, stimmt mit der vorigen ganz überein, nur dass man die zweite Hauptbrennweite in der zweiten Hauptebene nicht nach oben, sondern nach unten hin auftragen und im leuchtenden Punkte jetzt $a + A_1$ senkrecht zur Axe ziehen muss. Ist also Fig. 11 LL eine Linse von oben

Fig. 11.



angenommener Beschaffenheit, deren Hauptpunkte in h' und h'' liegen, deren zweiter Hauptbrennpunkt in F, deren erster in A

sich befindet, so hat man im leuchtenden Punkte Q die Senkrechte $QC = Qh' + h'A$ zu errichten, C mit h' zu verbinden, ferner $h''H'' = h''F$ in der zweiten Hauptebene nach unten aufzutragen und $H''D$ mit Ch' parallel zu ziehen. Der Punkt D, in welchem die Axe getroffen wird, ist dann der Brennpunkt von Q. Wie man sieht, ist der Brennpunkt ein virtueller, so lange der leuchtende Punkt um mehr als den Abstand der beiden Hauptpunkte vor dem ersten Hauptpunkte liegt. Rückt der leuchtende Punkt in unendliche Entfernung, so wird das Dreieck $h'QC$ gleichschenklig, deshalb auch das Dreieck $Dh''H''$, der Punkt D fällt also in den zweiten Hauptbrennpunkt. Während dann der leuchtende Punkt aus unendlicher Entfernung bis h' sich dem ersten Hauptpunkte nähert, wird die Neigung von Ch' immer stärker, bis wenn Q in h' fällt, Ch' senkrecht zur Axe wird. Der Punkt D rückt daher der Linse immer näher, bis er in den zweiten Hauptpunkt fällt, wenn Q im ersten liegt.

Wird der leuchtende Punkt ein virtueller, rückt er also in Q_1, das heisst, convergiren die Strahlen nach einem hinter der Linse liegenden Punkte, so wird a negativ, unsere Proportion für f wird also

$$f : -F_1 = -a : -a + A_1 = -a : A_1 - a.$$

Wir haben dann in Q_1 die Linie $Q_1C_1 = A_1 - a$ senkrecht nach oben zu ziehen und $H''D_1$ mit C_1h' parallel zu ziehen. Da C_1 jetzt an der andern Seite der Linse, und so lange $A_1 > a$ nach oberhalb der Axe liegt, so ist die Neigung der Linie C_1h' entgegengesetzt der Neigung der früheren Ch'; die Gerade $H''D_1$ schneidet daher die Axe hinter der Linse, der Brennpunkt wird ein reeller. Er entfernt sich immer weiter von der Linse, bis wenn Q_1 in A fällt, also $A_1 - a$ gleich Null ist, auch C in A, also Ch' in die Axe fällt. Dann wird also auch $H''D_1$ der Axe parallel, der Brennpunkt rückt in unendliche Entfernung. Entfernt sich nun Q_1 noch weiter von der Linse, so dass also $a > A_1$ wird, so wird die Differenz $A_1 - a$ negativ. Dann muss diese Differenz von der Axe aus senkrecht nach unten gezogen werden, wie in Q_2 die Senkrechte $Q_2C_2 = Q_2A = Q_2h' - Ah'$. Dadurch wird die Neigung von C_2h' gegen die Axe wieder die frühere, wie wenn Q vor der Linse liegt, somit schneidet die mit C_2h' parallele $H''D_2$ die Axe wieder vor der Linse in D_2, der Brennpunkt wird also wieder ein virtueller. Rückt dann Q_2 von A bis in unendliche Entfernung, so rückt D_2 aus unendlicher

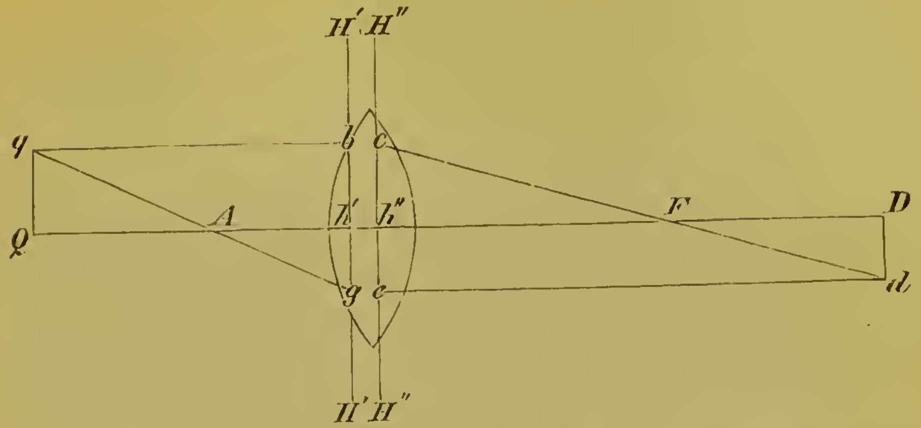
Entfernung bis in F. Denn je weiter Q_2 sich von der Linse entfernt, um so mehr nähert sich das Dreieck $h'Q_2C_2$ einem gleichschenkligen, es wird gleichschenklig, wenn sowohl $h'Q_2$ als auch Q_2C_2 unendlich werden. Dieselben Aenderungen erfährt aber das Dreieck $D_2h''H''$, deshalb nähert sich D_2 dem Punkte F um so mehr, je weiter Q_2 rückt, um in F zu fallen, wenn Q_2 unendlich weit entfernt wird, die Strahlen also parallel auf die Linse fallen.

Diese Construction lässt somit in allen Fällen den Bildpunkt eines gegebenen, auf der Axe liegenden leuchtenden Punktes auffinden, wenn die beiden Hauptbrennweiten bekannt sind und der Abstand des leuchtenden Punktes gegeben ist. Zugleich setzt sie uns auch in den Stand, die Aenderungen in der Lage des Bildpunktes sofort zu übersehen, wenn der leuchtende Punkt seine Lage ändert.

Ebenso können wir auch wenigstens einige der vorhin in §. 3 gegebenen Constructionen für die Bilder von ausser der Axe liegenden leuchtenden Punkten oder ausgedehnten Objecten anwenden, wenn wir die Hauptbrennweiten kennen. Denn zunächst haben wir nachgewiesen, dass der Bildpunkt eines ausser der Axe liegenden Punktes in einer zur Axe senkrechten Ebene liegt, welche die Axe in dem Brennpunkte des Punktes schneidet, welcher der Fusspunkt der von dem leuchtenden Punkte auf die Axe herabgelassenen Senkrechten ist. Wir haben daher, um das Bild des Punktes durch den Abstand desselben von der Axe vollständig zu bestimmen, nur noch den Durchschnittspunkt eines Strahles und der eben angeführten Ebene zu bestimmen. Dazu gelangen wir mit Hülfe der ersten oder zweiten Hauptbrennweite, indem wir wissen, dass jeder im ersten Mittel mit der Axe parallele Strahl nach sämmtlichen Brechungen durch den zweiten Hauptprennpunkt und jeder durch den ersten Hauptbrennpunkt gehende Strahl nach der Brechung mit der Axe parallel ist.

Sei nun, um diese Construction durchzuführen, q, Fig. 12, ein ausser der Axe liegender leuchtender Punkt, oder qQ eine zur Axe senkrechte, im Abstande Qh' vor dem ersten Hauptpunkte der Linse befindliche Linse. Vor der Linse sei Luft, hinter ihr ein anderes Mittel, $H'H'$, $H''H''$ seien die Hauptebenen, A der erste, F der zweite Hauptbrennpunkt der Linie. Um nun das Bild von Qq zu erhalten, können wir zunächst nach der im Vorigen entwickelten Construction den Bildpunkt D des Punktes Q erhalten und in D eine zur Axe senkrechte Ebene legen; wir ziehen dann

Fig. 12.



von q aus die Linie qb parallel mit der Axe, der zu qb gehörige gebrochene Strahl muss nach der Brechung durch F gehen, es bedarf daher, um seine Richtung und den Punkt d zu bestimmen, in welchem er die durch D gelegte Ebene schneidet, nur noch eines zweiten Punktes, der ebenfalls zu dem gebrochenen Strahl gehört. Denselben erhalten wir durch die Eigenschaft der Hauptebene, dass ein Strahl, der im ersten Mittel nach einem Punkte der ersten Hauptebene sich bewegt, nach seiner Brechung im letzten Mittel von einem genau so gelegenen Punkte der zweiten Hauptebene herkommen muss. Diese Eigenschaft ergibt sich aus dem Satze, dass das Bild eines in der ersten Hauptebene gelegenen Punktes in der zweiten Hauptebene an derselben Seite und ebenso weit von der Axe liegen muss. Wir können nämlich den durch den Punkt c gehenden Strahl als von dem Punkte b ausgehend betrachten, dann muss aber der zu qb gehörige gebrochene Strahl von dem Bilde des Punktes b in der zweiten Hauptebene ausgehen. Das Bild von b ist der Punkt c, den wir erhalten, wenn wir von b eine Senkrechte auf die zweite Hauptebene ziehen. Demnach ist cF der zu qb gehörige gebrochene Strahl und der Punkt d, wo dieser Strahl die durch D gelegte Ebene schneidet, ist das Bild von q oder dD das Bild von qQ.

Dass in der That der Abstand Dd der durch unsere Gleichung

$$y = -\frac{f}{n\,n'\,a} \cdot Y$$

geforderte ist, lässt sich leicht zeigen. Entwickeln wir nämlich aus der Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n\,n'\,a}$$

den Werth von $\frac{f}{nn'a}$, so wird zunächst

$$f = \frac{nn'a \cdot F}{nn'a - F}$$

und weiter

$$fnn'a - fF = nn'aF$$
$$nn'a\,(f - F) = f \cdot F$$
$$\frac{f - F}{F} = \frac{f}{nn'a}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung für y ein, so wird

$$-\frac{y}{Y} = \frac{f - F}{F}.$$

In unserer Construction ist aber

$$dD : ch'' = DF : Fh'';$$

dD ist nun gleich $-y$, $ch'' = bh' = qQ$ ist Y, ferner $DF = Dh'' - h''F$ ist $f - F$ und schliesslich ist Fh'' gleich F. Somit wird die Proportion

$$-y : Y = f - F : F$$

dieselbe, welche sich aus der Gleichung ergibt.

Anstatt des mit der Hauptaxe parallelen Strahles qb kann man zu dieser Construction auch den durch den ersten Hauptbrennpunkt A gehenden Strahl benutzen, da man weiss, dass derselbe nach der Brechung der Axe parallel wird. Man hat nur q mit A zu verbinden und qA zu verlängern, bis die Linie in g die erste Hauptebene trifft, hat dann in der zweiten Hauptebene $h''c$ gleich $h'g$ zu machen und durch c eine Parallele zur Axe zu legen, der Punkt d, in welchem diese Parallele die durch D gelegte Ebene trifft, ist dann das Bild von q.

Dass auch hier der Abstand dD der durch unsere Gleichung verlangte ist, ergibt sich in folgender Weise. Setzen wir in unsere Gleichung

$$-\frac{y}{Y} = \frac{f}{nn'a}$$

für f seinen Werth ein und beachten, dass $\frac{F}{nn'} = A$, so wird

$$-\frac{y}{Y} = \frac{aF}{nn'a\,(a - A)} = \frac{A}{a - A}.$$

In unserer Construction Fig. 12 ist aber

$$h'g : gQ = Ah' : AQ;$$

darin ist $h'g = dD = -y$; $gQ = Y$, $Ah' = A$, $AQ = h'Q - AQ = a - A$, somit

$$-y : Y = A : a - A,$$

wie es unsere Gleichung verlangt.

Dass man nun auch, ohne vorher den Punkt D zu bestimmen, lediglich durch die beiden Strahlen qb und qg den Brennpunkt D bestimmen kann, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

§. 7.

Einführung der Knotenpunkte. Die in §. 3 zuerst besprochene Construction für die Bilder von ausser der Axe liegenden leuchtenden Punkten oder ausgedehnten Objecten, die Construction mit Hülfe der Nebenaxe lässt sich mit Hülfe der bisher gewonnenen Resultate nicht ausführen, da wir bei einem Systeme von brechenden Flächen nicht solche Nebenaxen haben, auf denen das Bild liegen muss, wie bei einer brechenden Fläche. Es ist jedoch in jedem gebrochenen Strahlenbündel ein Strahl vorhanden, welcher einem Strahle des einfallenden Strahlenbündels parallel ist. Könnten wir deshalb die Lage dieser Strahlen bestimmen, so liess sich mit Hülfe derselben eine jener einfachen Construction mit den Nebenaxen bei einer brechenden Fläche ähnliche durchführen.

Die Lage dieser Strahlen lässt sich nun bestimmen, indem wir die Punkte der Axe aufsuchen, in welchen dieselbe von jenen einander parallelen Strahlen geschnitten werden. Es gibt nämlich in jedem System brechender Flächen zwei auf der Axe liegende Punkte, welche so beschaffen sind, dass ein im ersten Mittel nach dem einen derselben sich hinbewegender Strahl nach seiner Brechung im letzten Mittel entweder wirklich oder passend verlängert durch den zweiten dieser Punkte geht, und dass der gebrochene Strahl dem einfallenden Strahle parallel ist. Diese Punkte, welche Listing in die Dioptrik eingeführt hat, heissen die Knotenpunkte. Ein im ersten Mittel nach dem ersten Knotenpunkte gehender Strahl geht im letzten Mittel durch den zweiten Knotenpunkt und ist dem einfallenden Strahle parallel. Die Lage der Punkte hängt nur ab von der Beschaffenheit der brechenden Flächen und den Brechungsexponenten der verschiedenen Mittel; zur Bestimmung

derselben haben wir nur die durch die Definition gegebenen Eigenschaften in unseren Gleichungen auszudrücken.

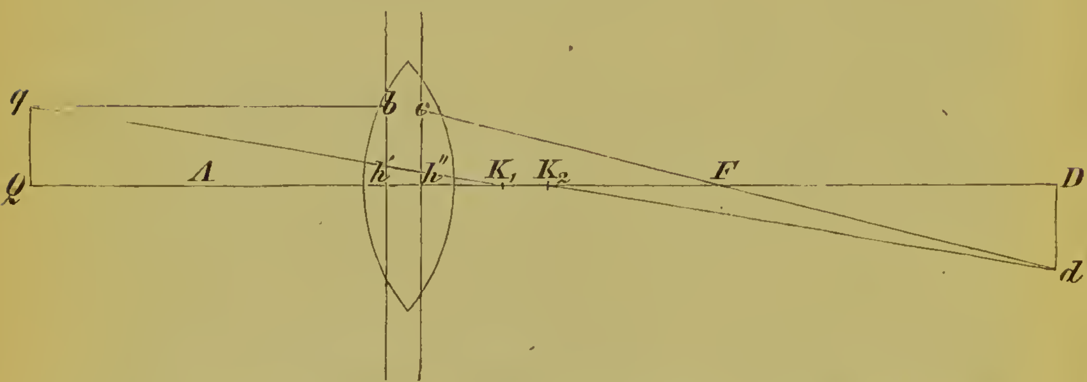
Da jeder im ersten Mittel nach dem ersten Knotenpunkte gehende Strahl nach der Brechung durch den zweiten Knotenpunkt geht, so folgt, dass der zweite Knotenpunkt das Bild des ersten ist, das heisst, dass wenn im ersten Knotenpunkte ein leuchtender Punkt sich befinden würde, sein Bild im zweiten Knotenpunkte liegt. Bezeichnen wir daher den Abstand des ersten Knotenpunktes vom ersten Hauptpunkte mit k', den Abstand des zweiten Knotenpunktes vom zweiten Hauptpunkte mit k'', so muss zwischen k' und k'' dieselbe Beziehung bestehen, wie zwischen dem Abstande eines leuchtenden Punktes von der ersten und seines Brennpunktes von der zweiten Hauptebene, oder es muss

$$\frac{1}{k''} = \frac{1}{F} - \frac{1}{nn'k'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

worin wie früher F die zweite Hauptbrennweite bedeutet.

Die zweite Gleichung zur Bestimmung der beiden Unbekannten k' und k'' erhalten wir aus der Bedingung, dass die durch die beiden Knotenpunkte gehenden Strahlen parallel sein sollen. Ist demnach K_1, Fig. 13, der erste, K_2 der zweite Knotenpunkt,

Fig. 13.



q ein leuchtender Punkt, d sein Brennpunkt, so sind nach der Definition die Linien qK_1 und K_2d einander parallel. Daraus folgt dann, dass die beiden Dreiecke qQK_1 und dDK_2 einander ähnlich sind, und daraus, dass sich verhält

$$Qq : QK_1 = dD : DK_2.$$

Bezeichnen wir nun wie früher Qq mit Y, dD mit $-y$, so können wir obige Proportion auch schreiben

$$-\frac{y}{Y}=\frac{K_2D}{K_1Q}$$

Ist nun h' der erste, h'' der zweite Hauptpunkt, so ist $h'K_1 = k'$, $h''K_2 = k''$, ferner ist $Qh' = a$, $h''D = f$, demnach

$$QK_1 = a - k',\ K_2D = f - k'',$$

worin zum Verständniss des negativen Vorzeichens von k' zu beachten ist, dass, wenn wie in Fig. 13 K_1 hinter dem ersten Hauptpunkte liegt, der Werth von k' negativ, also $-k'$ positiv ist. Setzen wir nun diese Werthe in unsere Gleichung zwischen y und Y ein, so wird

$$-\frac{y}{Y}=\frac{f-k''}{a-k'}.$$

Andererseits haben wir zwischen y und Y die Gleichung

$$-\frac{y}{Y}=\frac{f}{nn'a}$$

und deshalb als zweite Gleichung zwischen k' und k''

$$\frac{f-k''}{a-k'}=\frac{f}{nn'a}\quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Aus der Gleichung (1) erhalten wir nun für k''

$$k''=\frac{nn'Fk'}{nn'k'-F}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (2), nachdem wir ihr die Form gegeben haben:

$$f-k''=\frac{f\,(a-k')}{nn'a}$$

so wird

$$f-\frac{nn'Fk'}{nn'k'-F}=\frac{f\,(a-k')}{nn'a}.$$

Schaffen wir in dieser Gleichung die Nenner fort, indem wir mit $a\,(nn'k'-F)$ multipliciren, so wird

$$fa\,(nn'k'-F)-nn'aFk'=f\,(a-k')\frac{nn'k'-F}{nn'}=f\,(a-k')\,(k'-A).$$

Dividiren wir die Gleichung durch f

$$a\,(nn'k-F)-\frac{nn'aF}{f}\,.\,k'=(a-k')\,(k'-A).$$

Wir können nun einsetzen

$$f=\frac{nn'aF}{nn'a-F};\qquad \frac{nn'aF}{f}=nn'a-F$$

und damit wird

$$a\,(nn'k' - F) - (nn'a - F)\,k' = (a - k')\,(k' - A)$$

oder indem wir die Multiplikation auf der linken Seite ausführen und abziehen

$$k'F - aF = (a - k')\,(k' - A) = ak' - k'k' - aA + k'A$$

und schliesslich, indem wir die a enthaltenden Glieder auf die eine Seite bringen und a und k' herausschreiben

$$k'\,(F - A + k') = a\,(F - A + k').$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen, sie wird nämlich erfüllt erstens, wenn wir setzen

$$k' = a;$$

zweitens aber, welches auch der Werth von a sein mag, dadurch, dass wir die Coefficienten von a oder k' gleich 0 setzen, also durch

$$F - A + k' = 0$$
$$k' = A - F.$$

Diesen beiden entsprechen auch zwei Lösungen, wenn wir mit Hülfe dieser Werthe aus der Gleichung (1) oder (2) den Werth von k'' ableiten. Dem ersten Werthe k' gleich a, also dem Abstande des leuchtenden Punktes, entspricht natürlich der Werth

$$k'' = f,$$

also der Abstand des Bildpunktes. Dem zweiten von a unabhängigen Werthe von k' entspricht auch ein von a und f unabhängiger Werth von k''. Schreiben wir die Gleichung (2)

$$k'' = \frac{F\,.\,k'}{k' - A}$$

und setzen den zweiten Werth von k' ein, so wird

$$k'' = \frac{F\,(A - F)}{A - F - A} = -\,(A - F) = F - A.$$

Diese je zwei Werthe bestimmen die ersten für den einfallenden, die letzteren für den gebrochenen Strahl für jeden zwei Punkte, durch welche die Strahlen gehen müssen, damit sie einander parallel werden. Der eine der Punkte im einfallenden Strahle ist selbstverständlich der leuchtende Punkt selbst; er ist gegeben durch die erste der beiden Lösungen $k' = a$; der eine der Punkte im gebrochenen Strahle ist ebenso selbstverständlich das Bild des leuchtenden Punktes, er ist in der ersten der beiden

Lösungen für den zweiten Hauptpunkt gegeben $k'' = f$. Der zweite Punkt des einfallenden Strahles ist durch die Lösung

$$k' = A - F$$

gegeben, es ist also ein bestimmter Punkt auf der Axe des Systems, dessen Abstand vom ersten Hauptpunkte gleich ist der Differenz der ersten und zweiten Hauptbrennweite. Ebenso ist der zweite Punkt des gebrochenen Strahles ein bestimmter Punkt der Axe, welcher um

$$k'' = F - A$$

also um die Differenz der zweiten und ersten Hauptbrennweite hinter dem zweiten Hauptpunkte liegt.

Diese Punkte sind also immer dieselben, ihre Lage ist nicht abhängig von der Lage des leuchtenden Punktes, sondern nur von der Beschaffenheit der brechenden Flächen und den Brechungsexponenten der verschiedenen Mittel. Diese beiden Punkte sind also die beiden Knotenpunkte, und da die Ausdrücke, welche die Abstände derselben von den Hauptpunkten liefern, nur eine Lösung gestatten, so folgt, dass es für jedes System von zwei brechenden Flächen nur ein Paar solcher Knotenpunkte gibt.

Da der Abstand des ersten Knotenpunktes vom ersten Hauptpunkte gleich ist der Differenz zwischen der ersten und zweiten Hauptbrennweite, so liegt der erste Knotenpunkt um die zweite Hauptbrennweite hinter dem ersten Hauptbrennpunkt. Der Abstand des zweiten Knotenpunktes vom zweiten Hauptpunkte ist gleich der Differenz der zweiten und ersten Hauptbrennweite; der zweite Knotenpunkt liegt also um die erste Hauptbrennweite vor dem zweiten Hauptbrennpunkte. Da schliesslich der Abstand der beiden Hauptbrennpunkte gleich ist der Summe der beiden Hauptbrennweiten und des Abstandes der beiden Hauptpunkte, so folgt, dass der Abstand der beiden Knotenpunkte gleich ist dem Abstande der beiden Hauptpunkte.

Wie man nun mit Hülfe der Knotenpunkte das Bild eines leuchtenden Objectes findet, zeigt Fig. 13 unmittelbar, man verbindet den leuchtenden Punkt q mit dem ersten Knotenpunkte, zieht durch den zweiten Knotenpunkt eine Parallele mit dieser Verbindungslinie und verlängert dieselbe, bis sie in d die durch D gelegte Ebene oder den durch den zweiten Hauptbrennpunkt gehenden Strahl schneidet. Der Punkt d ist dann der Bildpunkt von q oder dD das Bild von qQ.

Durch Einführung der Knotenpunkte haben wir die sämmtlichen Cardinalpunkte eines optischen Systems abgeleitet, es sind deren drei Paare, die Hauptbrennpunkte, Hauptpunkte und und Knotenpunkte. Durch diese Punkte ist das optische System vollständig bestimmt, so dass zwei Systeme, deren Cardinalpunkte dieselben sind, mit einander identisch gleich sind. Ausreichend bestimmt ist das optische System schon durch die Hauptbrennpunkte und Hauptpunkte, da aus diesen sich die Knotenpunkte schon ergeben. Es genügt daher, um den Gang der Lichtstrahlen durch ein beliebiges System kennen zu lernen, die Hauptbrennpunkte und Hauptpunkte zu bestimmen.

§. 8.

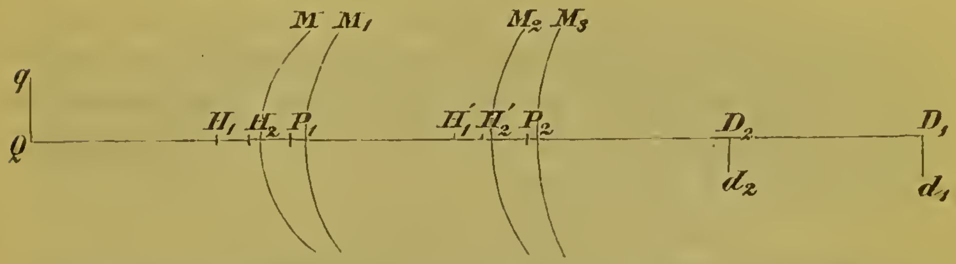
Brechung des Lichtes in einem centrirten System beliebig vieler kugelförmiger Flächen. Die Gesetze der Lichtbrechung in einem centrirten Systeme von zwei kugelförmigen brechenden Flächen sind in den vorigen Paragraphen vollständig erhalten, da wir mit Hülfe der Cardinalpunkte des Systems den Gang jedes Strahles ableiten oder das Bild jedes leuchtenden Objectes auffinden können. Unser Auge besteht aber aus einer grössern Anzahl von brechenden Flächen, um daher den Gang der Lichtstrahlen im Auge übersehen zu können, müssen wir die Brechung des Lichtes in aus mehrfachen Flächen zusammengesetzten Systemen untersuchen.

Wie bereits im §. 3 erwähnt wurde, können wir dazu einen doppelten Weg einschlagen; wir können, wie wir aus den Gesetzen der Brechung in einer kugelförmigen Fläche diejenigen in einem Systeme von zwei Flächen ableiteten, mit Hülfe der im Vorigen erhaltenen Resultate auf drei, dann auf vier Flächen und so fort übergehen. Der Weg würde indess sehr mühsam sein und zu sehr complicirten Formeln führen. Bequemer ist es, wenn wir die in den letzten Paragraphen für ein System aus zwei brechenden Flächen erhaltenen Resultate benutzen, und bei mehr als zwei brechenden Flächen zunächst je zwei als ein System zusammenfassen, für dieses die Brennpunkte und Hauptpunkte bestimmen und dann die Brennpunkte und Hauptpunkte des ganzen Systems ableiten. Hat man mehr als vier brechende Flächen, so fasst man dann die ersten vier Flächen als ein System zusammen, und so succesiv weiter. Es wird für die Zwecke dieser Einleitung genügen, wenn wir die Rechnungen in einem Systeme von

vier brechenden Flächen durchführen, da sie für eine grössere Zahl dieser ganz analog sind.

Seien M, M_1, M_2 M_3, Fig. 14, vier solcher brechender Flächen,

Fig. 14.



der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Uebergange aus dem ersten Mittel in das zweite, also bei dem Durchtritte desselben durch die Fläche M sei n, beim Uebergange in das dritte Mittel sei n', in das vierte n'' und in das letzte n'''. Wir betrachten nun die beiden Flächen M und M_1 als das erste, M_2 und M_3 als das zweite System. Die Hauptpunkte des ersten Systems seien H_1 und H_2, die des zweiten Systems H_1' und H_2'; ferner sei die erste Hauptbrennweite des ersten Systems A_1, des zweiten Systems A_2, die zweite Hauptbrennweite des ersten Systems sei F_1, des zweiten Systems F_2. Befindet sich nun im Abstande a_1 vor dem ersten Hauptpunkte des ersten Systems ein leuchtendes Object qQ, so entwirft das erste System von demselben ein Bild, dessen Abstand f_1 vom zweiten Hauptpunkte dieses Systems gegeben ist durch die Gleichung

$$f_1 = \frac{n n' a_1 F_1}{n n' a_1 - F_1} = \frac{a_1 F_1}{a_1 - A_1},$$

dessen Grösse y_1 gegeben ist durch

$$y_1 = -\frac{f_1}{n\, n'\, a_1} \cdot Y = -\frac{A_1}{a_1 - A_1} \cdot Y.$$

Dieses Bild, es sei $d_1 D_1$, ist nun das leuchtende Object für das zweite System. Ist sein Abstand vom ersten Hauptpunkte des zweiten Systems a_2, so entwirft das zweite System von demselben ein Bild, dessen Abstand vom zweiten Hauptpunkte desselben gegeben ist durch

$$f_2 = \frac{n'' n''' a_2 F_2}{n'' n''' a_2 - F_2} = \frac{a_2 F_2}{a_2 - A_2}$$

und dessen Grösse $y_2 = d_2 D_2$ gegeben ist durch

$$y_2 = -\frac{f_2}{n''n'''a_2}\cdot y_1 = -\frac{A_2}{a_2 - A_2}\cdot y_1$$

und wenn wir den eben gegebenen Werth von y_1 einsetzen

$$y_2 = \frac{A_2}{a_2 - A_2}\cdot\frac{A_1}{a_1 - A_1}\cdot Y.$$

Nun sei der Abstand des ersten Hauptpunktes des zweiten Systems vom zweiten Hauptpunkte des ersten Systems gleich D, so ist a_2 der Abstand des ersten Bildes $d_1 D_1$ vom ersten Hauptpunkte des zweiten Systems

$$a_2 = -(f_1 - D) = D - f_1,$$

da auch hier wieder, wenn $D_2 < f_1$, das Bild hinter dem ersten Hauptpunkte des zweiten Systems liegt, also a_2 negativ ist.

Darnach wird also

$$a_2 = D - \frac{a_1 F_1}{a_1 - A_1} = \frac{a_1 D - A_1 D - a_1 F_1}{a_1 - A_1}.$$

Setzen wir diesen Werth in den Ausdruck für f_2, so wird

$$f_2 = \frac{\dfrac{a_1(D - F_1) - A_1 D}{a_1 - A_1}\cdot F_2}{\dfrac{a_1(D - F_1) - A_1 D}{a_1 - A_1} - A_2}$$

und indem wir die einzelnen Nenner fortschaffen

$$f_2 = \frac{\{a_1(D - F_1) - A_1 D\} F_2}{a_1(D - F_1) - A_1 D - a_1 A_2 + A_1 A_2} = \frac{a_1 F_2 (D - F_1) - D A_1 F_2}{a_1(D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2}.$$

Der Ausdruck für y_2 wird dann

$$y_2 = \frac{A_1 A_2}{(a_1 - A_1)\left\{\dfrac{a_1(D - F_1) - A_1 D}{a_1 - A_1} - A_2\right\}}\cdot Y$$

$$y_2 = \frac{A_1 A_2}{a_1(D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2}\cdot Y.$$

Zur Vereinfachung dieser Ausdrücke suchen wir jetzt die Hauptpunkte des ganzen Systems und rechnen dann die Abstände des leuchtenden Objectes von dem ersten des Bildes von dem zweiten Hauptpunkte.

Die Hauptpunkte erhalten wir wieder durch die aus ihrer Definition gegebene Eigenschaft, dass der zweite das Bild des ersten und dass das Bild eines in der ersten Hauptebene liegenden Objectes in der zweiten Hauptebene an derselben Seite der Axe liegt und ebenso gross ist als das leuchtende Object.

Die zweite Eigenschaft sagt aus, dass

$$y_2 = Y,$$

also dass, wenn h_1 der Abstand des ersten Hauptpunktes des ganzen Systems von dem des ersten ist

$$\frac{A_1 A_2}{h_1 (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2} = 1$$

$$A_1 A_2 = h_1 (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2$$

und daraus

$$h_1 = \frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2}.$$

Den Abstand h_2 des zweiten Hauptpunktes des ganzen Systems von dem zweiten Hauptpunkte des zweiten Systems erhalten wir, wenn wir in der Gleichung für f_2 den soeben gefundenen Werth von h_1 einsetzen

$$h_2 = \frac{\frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2} (D - F_1) F_2 - D A_1 F_2}{\frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2} (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_2 A_1}$$

und daraus, indem wir Zähler und Nenner mit dem Nenner von h_1 multipliciren

$$h_2 = \frac{A_1 D F_2 (D - F_1) - A_1 D F_2 (D - F_1) + D A_1 F_2 A_2}{A_1 A_2 (D - F_1 - A_2)}$$

$$h_2 = \frac{D F_2}{D - F_1 - A_2}.$$

Es tritt also an die Stelle der ersten Hauptbrennweite des ersten Systems in dem Ausdrucke für den ersten Hauptpunkt, die zweite Hauptbrennweite des zweiten Systems in den Ausdruck für den zweiten Hauptpunkt, im Uebrigen sind die Ausdrücke ganz gleich.

Um nun die Abstände des leuchtenden Objectes von dem ersten Hauptpunkte P_1 an zu rechnen, sei $QP_1 = a$, dann ist

$$a_1 = a + h_1 = a + \frac{D A_1}{D - F_1 - A_2}.$$

Es sei ferner der Abstand des Bildes von dem zweiten Hauptpunkte P_2 oder $D_2 P_2 = f$, dann ist

$$f = f_2 - h_2 = f_2 - \frac{D F_2}{D - F_1 - A_2}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so wird

$$f = \frac{\left(a + \frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2}\right) F_2 (D - F_1) - D A_1 F_2}{\left(a + \frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2}\right)(D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2} - \frac{D F_2}{D - F_1 - A_2}$$

woraus sich in der schon mehrfach angewandten Umformung ergibt

$$f = \frac{(a + A_1 D)\, F_2 (D - F_1) - D A_1 F_2 (D - F_1 - A_2)}{\{a(D - F_1 - F_2) + A_1 A_2\}\, \{D - F_1 - A_2\}} - \frac{D F_2}{D - F_1 - A_2}$$

Bringen wir die Brüche auf der rechten Seite auf gleiche Benennung und heben dann die gleichen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behafteten Glieder gegen einander weg, so wird

$$f = -\frac{a\, F_1\, F_2}{a\,(D - F_1 - F_2) + A_1 A_2}$$

oder indem wir das negative Vorzeichen in den Nenner bringen

$$f = \frac{a\, F_1\, F_2}{a\,(F_1 + F_2 - D) - A_1 A_2}$$

Ebenso vereinfacht sich der Ausdruck für y_2, wenn wir dort für a_1 seinen Werth $a + h_1$ einsetzen, er wird

$$y_2 = -\frac{A_1\, A_2}{a\,(F_1 + F_2 - D) - A_1\, A_2} \cdot Y.$$

Durch Einführung der Hauptbrennweiten des Systems lassen sich diese Ausdrücke noch weiter vereinfachen. Aus der Gleichung für f erhalten wir

$$\frac{1}{f} = \frac{F_1 + F_2 - D}{F_1\, F_2} - \frac{A_1\, A_2}{A \,.\, F_1 \,.\, F_2}$$

Die zweite Hauptbrennweite F erhalten wir, wenn wir a gleich unendlich, also das letzte Glied rechts gleich Null setzen

$$\frac{1}{F} = \frac{F_1 + F_2 - D}{F_1\, F_2},$$

die erste Hauptbrennweite dagegen A, wenn wir f gleich unendlich setzen, also aus der Gleichung

$$\frac{1}{F} = \frac{A_1\, A_2}{A \,.\, F_1\, F_2}, \quad A = F \,.\, \frac{A_1\, A_2}{F_1\, F_2}$$

Beachten wir nun, dass

$$F_1 = n n' A_1, \quad F_2 = n'' n''' A_2,$$

so sieht man, dass hier wieder dieselbe Beziehung wie früher besteht

$$F = nn'n''n'''A.$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe erhalten wir nun für f die einfachen Gleichungen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{A_1 A_2}{a \, . \, F_1 F_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{nn'n''n'''a}$$

oder indem wir auf beiden Seiten mit F multipliciren

$$\frac{F}{f} = 1 - \frac{F \, . \, A_1 A_2}{a \, . \, F_1 F_2} = 1 - \frac{A}{a}$$

oder schliesslich

$$f = \frac{aF}{a - A}$$

und für y_2

$$y_2 = - \frac{f}{nn'n''n'''a} \cdot Y = - \frac{A}{a - A} \cdot Y.$$

Wir erhalten also auch hier wieder dieselbe Beziehung zwischen den Abständen der leuchtenden Objecte, ihrer Bilder und den Hauptbrennweiten wie früher, so dass man also auch hier wieder nur die Hauptpunkte und die Hauptbrennweiten zu bestimmen hat, um den Gang der Lichtstrahlen durch das complicirtere System zu bestimmen. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass wenn wir nur drei brechende Flächen haben, z. B. die Flächen M und M_1 zusammenfallen, dasselbe gilt; es bedeuten dann A_1 und F_1 eben nur die Brennweiten der einen Fläche, und die Hauptpunkte des ersten Systems fallen in den Scheitel derselben; D ist dann der Abstand des ersten Hauptpunktes des zweiten Systems vom Scheitel dieser Fläche.

Dass dieselbe Beziehung, welche wir hier für vier brechende Flächen nachgewiesen haben, auch für unendlich viele gilt, das ergibt sich ohne Weiteres hieraus, wenn man erwägt, dass man nach Bestimmung der Hauptpunkte und Hauptbrennweiten von je vier Flächen, diese als ein System zusammenfassen und dann für acht Flächen dieselben Rechnungen durchführen kann, wie hier für vier und so fort für beliebig viele. Auch die Lage der Hauptpunkte und die Werthe der Hauptbrennweiten werden durch ganz ähnliche Gleichungen gegeben, da die Form der Gleichungen, aus denen sich jene ergeben, immer dieselbe bleibt.

Dasselbe gilt für die Bestimmung der Knotenpunkte; wenn wir hier ganz genau dieselben Rechnungen durchführen, so er-

halten wir ebenso wie bei einem System von zwei brechenden Flächen

$$k' = A - F; \quad k'' = F - A.$$

Der erste Knotenpunkt liegt um die zweite Hauptbrennweite hinter der ersten, der zweite Knotenpunkt um die erste Hauptbrennweite vor dem zweiten Hauptbrennpunkte. Da nun das System der Gleichungen, aus denen sich die Lage der Knotenpunkte ergibt, auch für beliebig viele brechende Flächen dasselbe bleibt, so bleiben auch jene Beziehungen für k' und k'' dieselben. Durch die Bestimmung der Hauptpunkte und Hauptbrennpunkte ist also der Gang der Lichtstrahlen durch ein beliebiges System vollständig gegeben.

§. 9.

Chromatische Abweichung bei Linsen. Bei unseren bisherigen Entwickelungen über den Gang der Lichtstrahlen durch brechende Flächen und dem Nachweise, dass die von einem leuchtenden Objecte ausgehenden Strahlen sich in einem dem Objecte ähnlichen Bilde vereinigen, haben wir ausdrücklich nur die eine Einschränkung gemacht, dass die Ausdehnung der einzelnen Flächen so klein sei, dass wir sämmtliche dieselben treffenden Strahlen als Centralstrahlen ansehen können. Diese Beschränkung ist jedoch nicht die einzige, welche wir in der That gemacht haben, wir haben vielmehr stillschweigend noch die Voraussetzung gemacht, dass die leuchtenden Objecte nur einfarbiges Licht aussenden; diese Voraussetzung liegt darin, dass wir für jede brechende Fläche nur einen Brechungsexponenten angenommen haben.

Die Brechbarkeit des verschieden gefärbten Lichtes ist nämlich verschieden, somit haben auch die Brechungsexponenten der verschiedenen Lichtarten verschiedene Werthe. Da nun in unsern Gleichungen für die Lage der Bilder die Brechungsexponenten der verschiedenen Medien vorkommen, so folgt, dass je nach der Art des Lichtes, welches die leuchtenden Objecte aussenden, der Abstand des Bildes vom zweiten Hauptpunkte verschiedene Werthe annimmt. Betrachten wir, um diese Abhängigkeit der Brennweiten von der Farbe des Lichtes zu übersehen, den einfachsten Fall, eine Glaslinse in der Luft, etwas näher. Für die Lage des Bildes in diesem Falle haben wir die Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{nn'a},$$

worin

$$\frac{1}{F} = \frac{n'-1}{n'} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{nn'} \cdot \frac{1}{r} - \frac{(n'-1)(n-1)}{nn'} \frac{d}{r\varrho}$$

Wenn nun das Licht aus der Linse wieder in die Luft übertritt, ist $n' = \frac{1}{n}$, somit $nn' = 1$. Dadurch wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} - \frac{(n-1)\,d}{r\varrho}\right).$$

Da das letzte Glied in der Klammer immer nur einen kleinen Werth hat, so sieht man, dass je grösser n ist, um so kleiner die Hauptbrennweite ist, und dass sie fast in demselben Verhältniss abnimmt, wie der Werth von n zunimmt. Wenn deshalb ein leuchtendes Object nicht einfarbiges, sondern aus mehreren Farben zusammengesetztes Licht aussendet, so hat es nicht nur ein, sondern mehrere hinter einander liegende Bilder. Bekanntlich ist nun das Licht, welches die leuchtenden Objecte aussenden, fast immer zusammengesetzt, und um so mehr, je mehr das ausgesandte Licht dem Weissen sich nähert; das weisse Licht selbst enthält Licht aller Brechbarkeiten. Je nach dem Dispersionsvermögen der verschiedenen Medien sind die Unterschiede der Brechungsexponenten der verschiedenen Farben verschieden, für sämmtliche Mittel nimmt aber die Differenz $(n-1)$ vom rothen zum violetten Ende des Spectrums zu, so dass sie für roth am kleinsten, für violett am grössten ist, und für die dazwischen liegenden Farben Werthe hat, welche zwischen jenen Grenzen liegen. Daraus ergibt sich, dass jede Sammellinse und jede Combination von Sammellinsen von einem leuchtenden Objecte, welches weisses Licht aussendet, eine Reihe verschieden gefärbter Bilder entwerfen muss, von denen das violette dem zweiten Hauptpunkte und somit den brechenden Flächen am nächsten liegt, während das rothe am weitesten entfernt ist. Der Unterschied der Brennweiten ist jedoch immer nur klein, und deshalb sind dort, wo die Strahlen irgend einer Brechbarkeit ihren Brennpunkt haben, die übrigen Strahlen ihrem Brennpunkte und somit ihrer grössten Helligkeit ziemlich nahe; da nun aber diese Strahlen den Brenn-

punkt der erstern in Kreisen umgeben, so folgt, dass wir an Stelle eines Brennpunktes einen kleinen hellen Kreis erhalten. Da aber das Bild eines leuchtenden Objectes dadurch entsteht, dass die Brennpunkte der einzelnen leuchtenden Punkte sich ähnlich wie im Objecte zusammengruppiren, so werden die Bilder dadurch undeutlich, dass die Bilder der einzelnen Punkte über einander greifen. Die Folge dieser chromatischen Abweichung der Strahlen ist somit die, dass die von einem System brechender Flächen entworfenen Bilder undeutlich werden.

In einem System von brechenden Flächen, von denen je zwei in der vorher besprochenen Weise zusammengefasst als Sammellinse wirken, kann diese chromatische Abweichung niemals vermieden werden, es summiren sich vielmehr die Abweichungen der einzelnen Linsen. Dieselbe kann vielmehr nur dann aufgehoben oder wenigstens stark vermindert werden, wenn bei passender Wahl der brechenden Medien wenigstens ein System der ganzen Combination als Zerstreuungslinse wirkt. Welche Bedingungen dabei erfüllt sein müssen, das abzuleiten würde uns zu weit führen.*)

§. 10.

Die brechenden Medien unseres Auges. Der wesentlichste Theil der Aufgabe, welche wir uns hier gestellt haben, ist in dem Vorigen gelöst, da wir dort die Entwicklungen gegeben haben, welche zum Verständniss des Ganges der Lichtstrahlen im menschlichen Auge nothwendig sind. Um indess den Zweck dieser Schrift, das Verständniss der Dioptrik des Auges zu erleichtern, vollständig zu erreichen, wollen wir die erhaltenen Resultate auf einige der wichtigsten Punkte aus der Dioptrik des Auges anwenden, nämlich die Cardinalpunkte des mittlern normalen Auges bestimmen und die Entstehung der Bilder im Auge betrachten.

Um die Cardinalpunkte eines optischen Systems zu bestimmen, muss man die Krümmungsradien der brechenden Flächen, die Abstände derselben von einander und die Brechungsexponenten der verschiedenen Medien kennen.

Die brechenden Flächen unseres Auges sind die vordere und hintere Fläche der Hornhaut, deren letztere zugleich die vordere

---

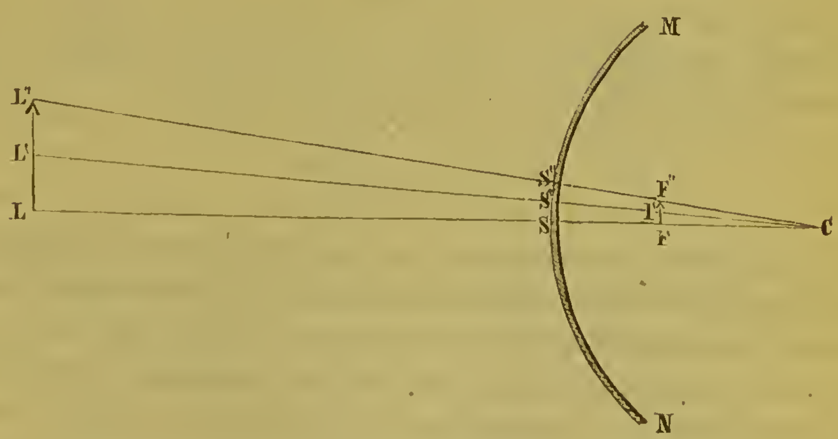
*) Man sehe mein Lehrbuch der Physik, Theil II. (Optik) p. 776 ff.

Fläche der wässerigen Feuchtigkeit ist, die vordere Fläche der Linse, welche zugleich die hintere Fläche der wässerigen Feuchtigkeit ist, und die hintere Fläche der Linse, welche zugleich die vordere Fläche des Glaskörpers ist. Auf der hintern Fläche des Glaskörpers ist dann die lichtempfindende Netzhaut ausgebreitet. Die brechenden Medien sind die Hornhaut, die wässerige Feuchtigkeit, die Krystalllinse und der Glaskörper.

Wir beginnen mit der Untersuchung der Hornhautkrümmung. Die Form der krummen Flächen des menschlichen Auges kann entweder an frischen todten oder an lebenden Augen bestimmt werden. Erstere Methode ist jedenfalls die bequemste, da man etwa an Durchschnitten solcher Augen die betreffenden Dimensionen direct abmessen kann, an Zuverlässigkeit steht sie jedoch der letzteren schon um deswillen bedeutend nach, weil wir durchaus nicht sicher sein können, dass in dem todten Auge die Verhältnisse noch so sind als im lebenden Auge. Wo man deshalb die zur Bestimmung des Ganges der Lichtstrahlen erforderlichen Constanten am lebenden Auge bestimmen kann, ist dieser Weg jedenfalls vorzuziehen. Derselbe ist deshalb in neuerer Zeit zur Bestimmung der Hornhautkrümmung ausschliesslich eingeschlagen, indem man die von der vorderen Fläche der Hornhaut durch Spiegelung entworfenen Bilder dazu benutzt hat.

Die Hornhaut entwirft nämlich wie jede convexe spiegelnde Fläche von vor ihr befindlichen leuchtenden Objecten ein aufrecht stehendes virtuelles Bild. Ist nun MN Fig. 15 eine solche spiegelnde Fläche, vor welcher in dem Abstande $CL = a$ vom Mittel-

Fig. 15.



punkte sich eine zur Axe des Spiegels senkrechte leuchtende Linie LL'' befindet, so entwirft der Spiegel von dieser ein aufrechtes

Bild FF'', dessen Abstand von dem Mittelpunkte des Spiegels f gegeben ist durch die Gleichung*)

$$f = \frac{ar}{2a - r}.$$

Für die Grösse dieses Bildes LL' sieht man sofort, da sich die Linien LC und LC'' im Mittelpunkte schneiden, dass sich dieselbe zur Grösse des Gegenstandes LL'' verhält wie der Abstand des Bildes vom Mittelpunkt zum Abstande des Objectes vom Mittelpunkte, oder

$$LL'' : FF'' = a : \frac{ar}{2a - r}.$$

Ist nun der Abstand a des leuchtenden Objectes vom Mittelpunkte so gross, dass wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, r gegen a vernachlässigen können, so wird

$$f = \frac{ar}{2a - r} = \frac{ar}{2a} = \frac{r}{2},$$

das Bild befindet sich im Halbirungspunkte des Radius und es ist

$$LL'' : FF'' = a : \frac{r}{2},$$

Die Grösse des Objectes verhält sich zur Grösse des Bildes wie der Abstand des Objectes von dem Mittelpunkte des Spiegels zum halben Radius. Für den Abstand des Objectes vom Mittelpunkte können wir dann auch ohne einen merklichen Fehler den Abstand des leuchtenden Objectes vom Scheitel des Spiegels setzen.

Kennt man nun die Grösse des leuchtenden Objectes und die Grösse des Bildes, so kann man aus obiger Gleichung auch den Radius des Spiegels berechnen; es ist dann

$$r = 2a \frac{FF''}{LL''}.$$

Es ist leicht zu übersehen, wie man diesen Satz zur Bestimmung des Krümmungsradius der Hornhaut benutzen kann, man hat nur die Grösse des Bildes zu messen, welches die Hornhaut von einem ziemlich entfernten Objecte von bekannter Grösse entwirft; mit Hülfe der gemessenen Entfernung des Objectes vom

*) Man sehe mein Lehrbuch der Physik, II. Theil (Optik) p. 658.

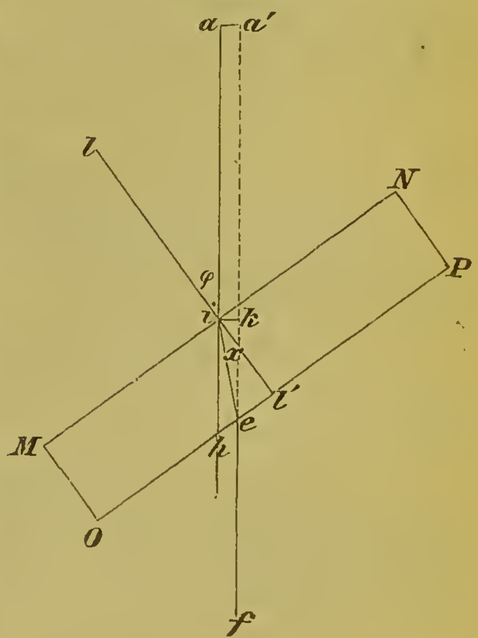
Auge berechnet man dann den Krümmungsradius der Hornhaut aus obiger Gleichung.

Der erste, welcher diesen Weg einschlug, war wohl Kohlrausch.*) Wir wollen das Verfahren, welches derselbe anwandte, um die Grösse der von der vorderen Hornhautfläche entworfenen Bilder zu bestimmen, nicht ausführlicher besprechen, da dasselbe keinenfalls die Genauigkeit des später von Helmholtz benutzten Verfahrens besitzt. Es bestand im Wesentlichen darin, dass derselbe in einem Fernrohr die von der Hornhaut entworfenen Bilder beobachtete und dann später die Grösse derselben auf einem an die Stelle des Auges gebrachten Maassstabe bestimmte. Er untersuchte auf diese Weise 12 Augen und fand als grössten Werth für den Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche 8,163 Millimeter, als kleinsten 7,554 Millimeter und im Mittel 7,870 Mm.

Aus diesen Messungen ergibt sich somit schon, dass die Krümmung der vorderen Hornhautfläche bei verschiedenen Menschen eine ziemliche Verschiedenheit zeigen kann, ein Resultat, welches die genaueren Messungen von Helmholtz bestätigen.

Helmholtz**) bestimmte die Grösse der von der Vorderfläche der Hornhaut entworfenen Bilder direkt mit einem eigens zu diesem Zwecke construirten, zur Messung kleiner Grössen sehr geeigneten Apparate, dem Ophthalmometer. Das Princip dieses Apparates ist einfach folgendes. Durch eine von ebenen und parallelen Wänden begrenzte Glasplatte werden die Lichtstrahlen nicht aus ihrer Bahn abgelenkt, aber, wenn die Strahlen nicht senkrecht auf die Platte auftreffen, parallel sich selbst verschoben. Denn ist z. B. ai, Fig. 16, ein die Platte $MNOP$ unter dem Einfallswinkel $\varphi = ail$ treffender Lichtstrahl, so wird derselbe in der Platte nach der Richtung ie gebrochen, und zwar so, dass

Fig. 16.



*) Kohlrausch in Okens Isis, Jahrgang 1840, p. 886.
**) Helmholtz in Gräfes Archiv für Ophthalmologie Bd. II. p. 3 ff. 1854.

wenn n der Brechungsexponent der Platte und x der Brechungswinkel ist, dass

$$\sin \varphi = n \,.\, \sin x$$

ist. Bei e verlässt dann der Strahl die Platte wieder, so dass ef der austretende Strahl dem eintretenden ai parallel ist. Da aber der Strahl bei i und e gebrochen ist, so folgt, dass der austretende Strahl gegen den eintretenden nach der Seite der ersten Brechung um die Strecke ik verschoben ist. Die Grösse dieser Verschiebung hängt ab von der Dicke der Platte, ihrem Brechungsexponenten und dem Einfallswinkel φ, und lässt sich, wenn diese Grössen gegeben sind, berechnen. Es ist nämlich

$$\frac{ik}{ie} = \sin kei; \quad ik = ie \,.\, \sin kei.$$

Der Winkel kei, welchen der gebrochene Strahl in der Platte mit dem rückwärts verlängerten austretenden Strahl bildet, ist nach bekannten Sätzen aus der Lehre von den Parallelen gleich dem Winkel eih, welchen der gebrochene Strahl mit dem verlängerten einfallenden bildet. Dieser Winkel eih ist aber gleich dem Winkel hil' weniger dem Winkel eil', von denen der erste, da es der Winkel ist, welchen der verlängerte einfallende Strahl mit dem verlängerten Einfallslothe bildet, gleich dem Einfallswinkel φ und der zweite der Brechungswinkel x ist. Demnach ist

$$kei = eih = \varphi - x$$

und

$$ik = \sin\,(\varphi - x) \,.\, ie.$$

Die Länge ie ergibt sich aus der Dicke der Platte il' gleich d folgendermassen. Es ist

$$\frac{il'}{ie} = \cos eil' = \cos x,$$

somit

$$ie = \frac{il'}{\cos x} = \frac{d}{\cos x}$$

und setzen wir diesen Werth für ie ein, so wird die Verschiebung des Strahles

$$ik = d \,.\, \frac{\sin\,(\varphi - x)}{\cos x}.$$

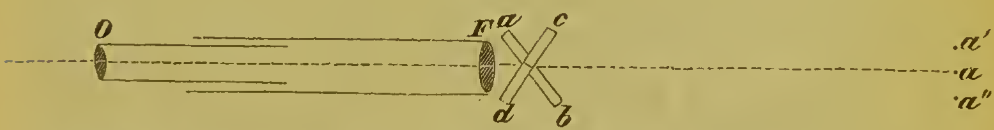
Der leuchtende Punkt a, von welchem der Strahl ai ausgeht, wird von einem unterhalb der Platte befindlichen Auge nun

auf der Verlängerung des Strahles ef also in a' gesehen werden, um dieselbe Grösse $aa' = ik$ also zur Seite geschoben.

Diesen Satz wendet Helmholtz an zur Construction seines Ophthalmometers. Vor dem Objective eines horizontal aufgestellten Fernrohrs wurden zwei Glasplatten von genau gleicher Dicke und gleichem Brechungsexponenten unter einander angebracht; die Ebenen der beiden Platten fielen ganz genau zusammen, so dass die Ebenen der unteren die Verlängerung der Ebenen der oberen Platte waren, dieselben waren zunächst senkrecht zur optischen Axe gestellt und bedeckten jede die Hälfte, beide zuzammen also das ganze Objectiv. Sieht man nun durch das Fernrohr nach einem entfernten Objecte, so sieht man dasselbe einfach und an seiner wirklichen Stelle, da alle Strahlen die beiden Glasplatten nahezu senkrecht treffen, also sowohl der Einfallswinkel als auch der Brechungswinkel gleich Null ist.

Die beiden Glasplatten waren nun jede an einer vertikalen Axe befestigt, so dass die Axe der einen die Verlängerung der anderen war und dass beide die optische Axe des Fernrohrs schnitten und zu derselben senkrecht waren. Mit Hülfe an den Axen befindlicher Zahnräder und passend angebrachter Triebe konnten nun die Axen und mit denselben die Platten gedreht werden, und zwar die eine Platte in dem einen, die andere in dem entgegengesetzten Sinne. Von oben gesehen gibt Fig. 17 die Lage der Platten nach einer solchen Drehung schematisch an.

Fig. 17.



OF ist das Fernrohr, cd die obere, ab die untere Platte, welche beide vor der Drehung senkrecht zur Axe des Fernrohrs OF stehen. Sind die Platten nun, wie Fig. 17 darstellt, um einen Winkel φ, die eine nach der einen, die andere nach der entgegengesetzten Seite gedreht, so treffen die Lichtstrahlen, welche vorher zu beiden Platten senkrecht waren, die Platten jetzt unter einem Einfallswinkel φ. Dieselben werden daher jetzt nach der Seite verschoben, und zwar so, dass der von a kommende Strahl durch die obere Platte so gebrochen wird, als wenn er von a' herkäme, durch die untere Platte, als käme er von a'' her. Von dem betrachteten Punkte a sieht man daher in dem Fernrohre

jetzt zwei neben einander liegende Bilder a' und a'', deren wahrer Abstand sich aus der bekannten Dicke und dem Brechungsexponenten der Platte nach dem vorhin abgeleiteten Satze berechnen lässt, wenn man den Winkel φ, um welchen die Platten gedreht sind, kennt. Zur Messung desselben tragen die Axen oberhalb der oberen und unterhalb der unteren Platte getheilte Kreise, auf welche feststehende Radien hinzeigen. An diesen liest man direct den Winkel φ ab. Ist dann x der Brechungswinkel in beiden Platten, der sich aus der Gleichung

$$\sin x = \frac{\sin \varphi}{n}$$

ergibt, so haben wir nach obigem Satze für die Verschiebung des Punktes a nach a''

$$aa'' = d \cdot \frac{\sin (\varphi - x)}{\cos x}$$

und ebenso für die Verschiebung nach a'

$$aa' = d \cdot \frac{\sin (\varphi - x)}{\cos x},$$

und aus beiden für den Abstand der beiden Doppelbilder

$$a'a'' = aa' + aa'' = 2\, d \frac{\sin (\varphi - x)}{\cos x},$$

worin wie vorhin d die Dicke jeder der beiden Platten bedeutet.

Befindet sich nun an der Stelle des Punktes a eine zur Axe aO senkrechte Linie von der Länge $a'a''$ oder eine zur Axe senkrechte Fläche von dieser Breite, so entstehen auch von dieser zwei Bilder, die sich gerade in dem Punkte a berühren. Denn ist a der Mittelpunkt dieser Linie, so ist in dem einen Doppelbilde dieser Mittelpunkt nach a'', das vorher in a' befindliche Ende nach a gerückt, in dem zweiten Bilde ist der Mittelpunkt nach a' und das Ende ebenfalls nach a gerückt. Es folgt daraus, dass, wenn man die durch das Ophthalmometer erzeugten Doppelbilder so weit verschiebt, dass die beiden Bilder sich gerade berühren, dass dann die Summe der Verschiebungen genau gleich ist der wahren Grösse der von dem Ophthalmometer beobachteten Fläche oder Linie.

Wie man nun mit Hülfe des Ophthalmometers die Grösse eines von der vordern Hornhautfläche entworfenen Bildes und damit den Krümmungsradius der Hornhaut bestimmen kann, er-

gibt sich hiernach leicht. Man lässt den Kopf desjenigen, dessen Auge man beobachten will, mit dem Kinn auf einem Tische aufstützen und mit dem Auge am besten ein helles Fenster ansehen, auf welchem er einen Punkt fixirt. Man stellt dann das Ophthalmometer dem Auge gegenüber und richtet das Fernrohr desselben so, dass man ein deutliches Bild des von dem Auge entworfenen Bildes sieht. Man dreht dann die Glasplatten des Ophthalmometers so weit, bis die dann auftretenden Doppelbilder sich gerade berühren und berechnet aus dem gemessenen Drehungswinkel die Grösse der Verschiebung und somit die Grösse der Bilder. Aus dieser erhält man dann nach der vorhin gegebenen Entwicklung die Grösse des Krümmungsradius, indem man den doppelten Abstand des Objectes vom Auge mit dem Quotienten aus der Grösse des Bildes und des Objectes dividirt.

Auf diese Weise untersuchte Helmholtz drei Augen und fand den Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche im Scheitel derselben gleich 7,338 Mm., 7,646 Mm., 8,154 Mm., also in den drei untersuchten Augen nicht unmerklich verschieden. Ebenso zeigte Helmholtz, dass die Hornhaut nicht eine Kugelfläche sei, sondern ein Theil eines Ellipsoides, indem er die an verschiedenen Stellen eines horizontalen Durchschnittes des Auges entworfenen Bilder beobachtete und fand, dass die aus dem jedesmaligen Bilde abgeleiteten Krümmungsradien verschiedene Werthe hatten. Zur Bestimmung des Ganges der Lichtstrahlen lässt man indess diese Ellipsität ausser Acht und betrachtet die vordere Fläche der Hornhaut als Kugelfläche. Der Radius dieser Fläche ist allerdings für jedes Auge, wenn man ein specielles Auge untersuchen will, besonders zu bestimmen. Zur Berechnung der Cardinalpunkte des mittleren normalen Auges können wir indess einen mittleren Werth annehmen, derselbe ist nach den Messungen von Helmholtz und Kohlrausch gleich 7,8 Mm. zu setzen.

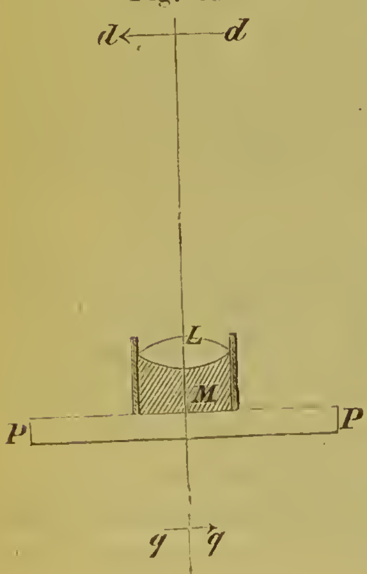
Der Krümmungsradius der hinteren Hornhautfläche ist nicht auf diesem Wege zu bestimmen, da diese Fläche kein Bild entwirft, weil der Brechungsexponent der Hornhautsubstanz fast genau gleich ist dem Brechungsexponenten der wässerigen Feuchtigkeit. Das Licht tritt deshalb, ohne eine neue Brechung und Reflexion zu erleiden, in die wässerige Feuchtigkeit über. Dieser Umstand vereinfacht die Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen wesentlich, da wir deshalb die Hinterfläche der Hornhaut nicht

als eine besondere brechende Fläche zu betrachten haben, sondern die Rechnung so führen können, als wenn die wässerige Feuchtigkeit bis an die vordere Fläche der Hornhaut sich erstrecke. Für die Bestimmung des Ganges der Lichtstrahlen im Auge ist deshalb weder die Kenntniss des Radius der hinteren Hornhautfläche noch auch die ihrer Dicke erforderlich.

Die Dicke der Hornhaut ist unter Anderen von Krause an acht verschiedenen Augen untersucht worden, er findet aus direkten Messungen die Dicke in der Mitte der Hornhaut im Mittel gleich 1,003 Mm., als grössten Werth 1,195, als kleinsten 0,789 Mm. Nach dem Rande zu wird die Hornhaut etwas dicker, im Mittel ergibt sich aus Krause's Messungen an denselben acht Augen 1,212 Mm., als grösster Werth 1,420, als kleinster 1,014. Es ergibt sich daraus, dass der Radius der hinteren Hornhautfläche etwas kleiner ist als derjenige der vorderen Fläche, somit, dass die Hornhaut eine convexconcave Linse ist.

Der Brechungsexponent der Hornhaut ist sehr oft untersucht worden; das zu dieser Messung sowie zur Messung der Brechungsexponenten der übrigen Medien des Auges angewandte Verfahren ist folgendes: man bringt die zu untersuchende Substanz zwischen eine planparallele Platte von Crownglas und das Objectiv eines Mikroskops, welches aus nur einer Linse von Crownglas besteht, und beobachtet dann entweder den Abstand oder die Grösse des Bildes, welches das so vorgerichtete Mikroskop von einem gegebenen Objecte entwirft. Nehmen wir an, es sei die Grösse des Bildes und Objectes bestimmt worden, und untersuchen wir, wie sich daraus der gesuchte Brechungsexponent bestimmen lässt.

Fig. 18



Das Schema der gemachten Anordnung zeigt Fig. 18. Von dem beobachteten, in der Luft befindlichen Objecte qq tritt das Licht zunächst in die Crownglasplatte PP, aus dieser in das zu untersuchende Medium, welches einerseits die Platte, andererseits die Linse berührt, aus diesem tritt das Licht in die Crownglaslinse L und von dort wieder in die Luft, in welcher es nach dem

Bilde $d\,d$ convergirt. Bezeichnen wir nun die erste Hauptbrennweite des ganzen Systems mit A, die zweite mit F und den Abstand des Objectes von dem ersten Hauptpunkte des Systems mit a, den Abstand des Bildes vom zweiten Hauptpunkte mit f, so ist die Grösse des Bildes nach §. 8 und 6 gegeben durch

$$-\frac{y}{Y} = \frac{A}{a - A} = \frac{f - F}{F},$$

worin das negative Vorzeichen bedeutet, dass wenn $f > F$, das Bild ein umgekehrtes ist. Misst man nun das Verhältniss $\frac{y}{Y}$ und den Abstand f, so kann man hieraus zunächst F bestimmen. Löst man die Gleichung nach F auf, so wird

$$F = \frac{f \,.\, Y}{Y - y},$$

wobei darauf zu achten ist, dass, wenn das Bild ein umgekehrtes ist, der Werth von y negativ zu setzen ist, also $-y$ positiv ist. Der Nenner des Ausdruckes für F ist dann die Summe der absoluten Grössen des Objectes und seines Bildes Da nun die Hauptbrennweite von den Brechungsexponenten sämmtlicher Medien abhängt, so können wir daraus den Brechungsexponenten der zu untersuchenden Substanz berechnen.

Das ganze System besteht aus zwei Paaren von brechenden Flächen, den beiden Flächen der ebenen Platte, vor der Luft, hinter der die zu untersuchende Substanz, und den beiden Flächen der Linse, vor der die zu untersuchende Substanz und hinter welcher Luft ist. Bezeichnen wir nun, wie in § 8, die erste Brennweite des ersten Paares der Platte mit A_1, die zweite mit F_1, die erste Brennweite des zweiten Paares mit A_2, die zweite mit F_2 und den Abstand des zweiten Hauptpunktes des ersten Paares vom ersten Hauptpunkte des zweiten Paares mit D, so ist

$$F = \frac{F_1 \,.\, F_2}{F_1 + F_2 - D}; \quad A = F \,.\, \frac{A_1\, A_2}{F_1 \,.\, F_2}.$$

Die Krümmungsradien der ebenen Platte sind unendlich gross, daraus folgt, dass auch die beiden Brennweiten derselben unendlich gross sind. Denn bezeichnen wir den Brechungsexponenten des Lichtes beim Uebertritt aus Luft in die Platte mit n, beim Uebertritt aus der Platte in die zu untersuchende Substanz mit n', so ist

$$\frac{1}{F_1} = \frac{n'-1}{n'} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{nn'} \cdot \frac{1}{r} + \frac{(n'-1)(n-1)}{nn'} \cdot \frac{d}{r\varrho},$$

worin r und ϱ die Krümmungsradien der Flächen und d die Dicke der Platte bedeutet. Da nun r und ϱ unendlich sind, so folgt

$$\frac{1}{F_1} = 0; \quad F_1 = \infty.$$

Da nun, wie wir ebenfalls §. 6 nachgewiesen haben,

$$nn' \,.\, A_1 = F_1,$$

so folgt auch $A_1 = \infty$.

Dividiren wir nun in dem Ausdrucke für F Zähler und Nenner durch F_1, so wird

$$F = \frac{F_2}{1 + \frac{F_2 - D}{F_1}} = F_2.$$

Die zweite Brennweite des ganzen Systems ist gleich der zweiten Brennweite des zweiten Paares, gleich derjenigen der Linse, vor welcher die zu untersuchende Substanz, hinter welcher Luft ist.

Um die erste Brennweite zu erhalten, dividiren wir in dem Ausdrucke für A Zähler und Nenner durch A_1, dann wird

$$A = F \,.\, \frac{A_2}{\frac{F_1}{A_1} \cdot F_2} = F \cdot \frac{A_2}{nn' \,.\, F_2}.$$

Bezeichnen wir nun den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus der zu untersuchenden Substanz in die Linse mit ν' und beim Uebertritt aus der Linse in Luft mit ν, den Krümmungsradius der unteren Linsenfläche mit r', den der oberen mit ϱ', so ist

$$\frac{1}{F_2} = \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{1}{\varrho'} + \frac{\nu'-1}{\nu \,.\, \nu'} \cdot \frac{1}{r'} - \frac{(\nu-1)(\nu'-1)}{\nu\nu'} \cdot \frac{\delta}{r'\varrho'}$$

wo δ den Abstand der Hauptpunkte der Linse bedeutet. Daraus erhalten wir

$$F_2 = \frac{\nu\nu' r' \varrho'}{(\nu-1)\nu' r' + (\nu'-1)\varrho' - (\nu-1)(\nu'-1)\delta}$$

und für die erste Hauptbrennweite

$$A_2 = \frac{F_2}{\nu\nu'}.$$

Darnach wird die erste Hauptbrennweite des ganzen Systems

$$A = \frac{F}{nn' \, . \, \nu\nu'}.$$

Nun ist $\nu = \frac{1}{n}$, da n der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Uebergange aus der Luft in die Crownglasplatte ist und ν derjenige beim Uebergange aus der Crownglaslinse in die Luft ist. Ebenso ist ν' der Brechungsexponent des Lichtes beim Uebergange aus der zu untersuchenden Substanz in die Linse gleich $\frac{1}{n'}$, gleich dem reciproken Werthe des Brechungsexponenten beim Uebergange des Lichtes aus der Crownglasplatte in die zu untersuchende Substanz. Daraus folgt

$$nn' \, . \, \nu \nu' = 1; \qquad A = F.$$

Die erste Brennweite unseres ganzen Systems ist gleich der zweiten Brennweite, wie sich das nach dem Früheren schon voraussehen liess, da das erste und letzte Mittel des ganzen Systems dasselbe, nämlich Luft ist.

Unsere Gleichung für F_2 gestattet nun schon den gesuchten Brechungsexponenten der zu untersuchenden Substanz, das heisst, den Brechungsexponenten beim Uebergange des Lichtes aus Luft in die zu untersuchende Substanz zu bestimmen.

Drücken wir zunächst ν und ν' durch n und n' aus, so wird

$$F_2 = \frac{\frac{1}{nn'} \, r' \varrho'}{\left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{1}{n'} \cdot r' + \left(\frac{1}{n'} - 1\right) \varrho' - \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{1}{n'} - 1\right) \delta}$$

oder indem wir den einzelnen Gliedern des Nenners den Nenner nn' geben und dann im Zähler und Nenner den Nenner nn' fortlassen

$$F_2 = \frac{r' \varrho'}{(1 - n) \, r' + (1 - n') \, n \varrho' - (1 - n) \, (1 - n') \, \delta}$$

Wir haben nun die Gleichung nur nach n' aufzulösen, um einen sehr nahe richtigen Werth davon zu erhalten. Es wird zunächst, indem wir mit dem Nenner rechts auf beiden Seiten multipliciren und die n' enthaltenden Glieder gesondert schreiben:

$$F_2 \left\{ (1 - n) \, r' + n \varrho' - (1 - n) \, \delta \right\} - F_2 \left\{ n n' \varrho - (1 - n) \, n' \delta \right\} = r' \varrho'$$

$$F_2 \left\{ (1 - n) \, r' + n \varrho' - (1 - n) \, \delta \right\} - r' \varrho' = n' F_2 \left\{ n \varrho - (1 - n) \, \delta \right\} \ldots \text{(I)}$$

$$n' = \frac{F_2\left\{(1-n)\,r' + n\varrho' - (1-n)\,\delta\right\} - r'\varrho'}{F_2\left\{n\varrho - (1-n)\,\delta\right\}}$$

Nehmen wir nun an, dass wir den Abstand des Bildes von der oberen Fläche der Linse, den wir leicht messen können, für den Abstand des Bildes vom zweiten Hauptpunkte setzen dürfen, dann ist F_2 gegeben durch die Gleichung

$$F_2 = F = \frac{fY}{Y-y}$$

und es sind in der Gleichung für n' nur noch die Radien r' und ϱ' der Linse zu messen, um n' berechnen zu können.

Das so berechnete n' ist der Brechungsexponent des Lichtes beim Uebergange aus Crownglas in die zu untersuchende Substanz; den Brechungsexponenten in der gewöhnlichen Bedeutung, beim Uebergange aus Luft in dieselbe, n_1 erhalten wir dann, indem wir n' mit n multipliciren oder

$$n_1 = nn'.$$

Dieses Verfahren zur Bestimmung von n' ist ziemlich umständlich, da man die Radien und die Dicke der Linse bestimmen und schliesslich eine complicirte Rechnung durchführen muss. Sehr viel bequemer kommt man zum Ziel, wenn man die vorhin angegebenen Messungen der Bildgrösse und des Bildabstandes von der Linse noch zweimal wiederholt, einmal, wenn zwischen dem Planglase und der Linse Wasser, und dann, wenn zwischen beiden Luft enthalten ist. Nennen wir den Brechungsexponenten beim Uebergange des Lichtes aus Crownglas in Wasser n_0 und die Hauptbrennweite des Systems in diesem Falle Φ_2, so haben wir genau wie vorhin für F_2 jetzt für Φ_2

$$\Phi_2 = \frac{r'\varrho'}{(1-n)\,r' + (1-n_0)\,n\varrho' - (1-n)\,(1-n_0)\,\delta},$$

wo in dieser Gleichung nur n_0 an die Stelle von n' in dem Ausdrucke für F_2 tritt. Daraus ergibt sich dann genau wie vorhin

$$\Phi_2\left\{(1-n)\,r' + n\varrho' - (1-n)\,\delta\right\} - r'\varrho' = n_0\,\Phi_2\left\{n\varrho - (1-n)\,\delta\right\} \ldots \text{(II)}$$

Nennen wir nun die Hauptbrennweite, wenn zwischen Planglas und Linse Luft ist, $\mathfrak{F}_2$, so erhalten wir dafür

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{r'\varrho'}{(1-n)\,r' + \left(1-\frac{1}{n}\right)n\varrho - (1-n)\left(1-\frac{1}{n}\right)\delta},$$

in welchem Ausdrucke, da vor der Linse Luft ist, an die Stelle von n' oder n_0 der Brechungsexponent $\frac{1}{n}$ des Lichtes bei dem Uebergange aus Crownglas in Luft tritt. Daraus erhalten wir weiter

$$\mathfrak{F}_2\left\{(1-n)r'+n\varrho'-(1-n)\delta\right\}-r'\varrho'=\frac{1}{n}\mathfrak{F}_2\left\{n\varrho-(1-n)\delta\right\}\ldots\text{(III)}$$

Ziehen wir nun die Gleichung II, welche Φ_2 enthält, von der vorher abgeleiteten Gleichung I, welche F_2 enthält, ab, so bekommen wir

$$(F_2-\Phi_2)\left\{(1-n)r'+n\varrho'-(1-n)\delta\right\}=(n'F_2-n_0\Phi_2)\left\{n\varrho-(1-n)\delta\right\}\ldots\text{(IV)}$$

Ziehen wir ebenso III von I ab, so wird

$$(F_2-\mathfrak{F}_2)\left\{(1-n)r'+n\varrho'-(1-n)\delta\right\}=(n'F_2-\frac{1}{n}\mathfrak{F}_2)\left\{n\varrho-(1-n)\delta\right\}\ldots\text{(V)}$$

und dividiren wir nun die Gleichung IV durch Gleichung V, so wird

$$\frac{F_2-\Phi_2}{F_2-\mathfrak{F}_2}=\frac{n'F_2-n_0\Phi_2}{n'F_2-\frac{1}{n}\mathfrak{F}_2};$$

aus welcher Gleichung wir n' lediglich aus den drei durch den Versuch bestimmten Hauptbrennweiten und den bekannten Brechungsexponenten des Wassers und Crownglases berechnen können. Multipliciren wir zunächst auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit n, so wird

$$\frac{F_2-\Phi_2}{F_2-\mathfrak{F}_2}=\frac{nn'F_2-nn_0\Phi_2}{nn'F_2-\mathfrak{F}_2}.$$

Wie wir nun schon vorhin sahen, ist $nn'=n_1$ gleich dem Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus Luft in die zu untersuchende Substanz, $nn_0=n_2$ gleich dem Brechungsexponenten des Lichtes beim Uebertritte in das destillirte Wasser. Führen wir diese Werthe ein und lösen nach n_1 auf, so wird

$$n_1F_2(F_2-\Phi_2)-\mathfrak{F}_2(F_2-\Phi_2)=n_1F_2(F_2-\mathfrak{F}_2)-n_2\Phi_2(F_2-\mathfrak{F}_2)$$

$$n_1F_2(\mathfrak{F}_2-\Phi_2)=\mathfrak{F}_2(F_2-\Phi_2)-n_2\Phi_2(F_2-\mathfrak{F}_2)$$

$$n_1=\frac{\mathfrak{F}_2(F_2-\Phi_2)-n_2\Phi_2(F_2-\mathfrak{F}_2)}{F_2(\mathfrak{F}_2-\Phi_2)}$$

Man kann die Gleichung zur Berechnung von n_1 noch bequemer machen, indem man zum Zähler auf der rechten Seite Φ_2F_2 addirt und dieselbe Grösse subtrahirt; fasst man dann die

einzelnen Glieder passend zusammen, so erhält man leicht

$$n_1 = \frac{F_2(\mathfrak{F}_2 - \Phi_2) + (n_2 - 1)\,\Phi_2(\mathfrak{F}_2 - F_2)}{F_2(\mathfrak{F}_2 - \Phi_2)}$$

und daraus

$$n_1 = 1 + (n_2 - 1)\,\frac{\Phi_2(\mathfrak{F}_2 - F_2)}{F_2(\mathfrak{F}_2 - \Phi_2)}.$$

Nach dieser Methode sind von W. Krause*) und Helmholtz**) die Brechungsexponenten nicht nur der Hornhaut, sondern auch der übrigen brechenden Medien des Auges bestimmt worden. Bei Krause fand sich in der Ocularblendung des zu diesen Versuchen benutzten Mikroskopes eine getheilte Glasplatte, an welcher die Grösse des von dem unteren Linsensysteme entworfenen Bildes gemessen wurde. Zugleich wurde durch Regelung des unteren Abstandes des leuchtenden Objectes von der unteren Linsenfläche dafür gesorgt, dass das Bild immer an derselben Stelle erzeugt wurde. Dadurch wurde der Werth von f in den Gleichungen für die Hauptbrennweite immer fast genau derselbe; verschieden sind sie nur dadurch, dass die Lage des Hauptpunktes sich mit der vor der Linse befindlichen Substanz etwas ändert. Vernachlässigt man diese Veränderung des zweiten Hauptpunktes, so kann man auch ohne diesen Werth von f zu kennen, und wenn man immer dasselbe leuchtende Object anwendet, selbst ohne Messung des letztern n_1 berechnen. Bezeichnen wir nämlich die drei Grössen der Bilder mit y, wenn die zu untersuchende Substanz, mit η, wenn Wasser, mit $\mathfrak{y}$, wenn Luft unter dem Mikroskop ist, so wird

$$F_2 = \frac{fY}{Y - y};\quad \Phi_2 = \frac{fY}{Y - \eta};\quad \mathfrak{F}_2 = \frac{fY}{Y - \mathfrak{y}}$$

und setzen wir die drei Werthe in die obige Gleichung für n_1 ein, so erhält man nach einigen Reductionen

$$n_1 = 1 + (n_2 - 1)\,\frac{\mathfrak{y} - y}{\mathfrak{y} - \eta}.$$

Auf diese Weise erhielt Krause für den Brechungsexponenten der Hornhaut Werthe, welche zwischen 1,3569 und 1,3434 lagen, im Mittel fand sich $n_1 = 1,3507$.

*) Krause. Die Brechungsindices der durchsichtigen Medien des menschlichen Auges. Hannover 1855. (Helmholtz, physiol. Optik § 10.)

**) Helmholtz. Physiologische Optik § 10.

Für die Brechungsexponenten der übrigen Medien fand Krause folgende Werthe:

	Wässerige Feuchtigkeit	Glaskörper
n_1	zwischen 1,3557 und 1,3349	zwischen 1,3569 und 1,3361
	Mittel 1,3420	Mittel 1,3485

Helmholtz fand für wässerige Feuchtigkeit 1,3365 und für den Glaskörper 1,3382.

Zur vollständigen Bestimmung des ersten Theiles unseres optischen Systems im Auge fehlt uns nur noch, nachdem wir die Krümmung der Hornhaut, sowie die Brechungsexponenten dieser und der wässerigen Feuchtigkeit kennen gelernt haben, der Abstand des Scheitels der vorderen Linsenfläche von der vorderen Fläche der Hornhaut, oder da wir die Dicke derselben kennen, der Abstand der vorderen Linsenfläche von der Hinterfläche der Hornhaut. Dieser Abstand ist von C. Krause an acht frischen Augendurchschnitten gemessen worden.*) Als grössten Werth fand er in zwei Fällen 3,044 Mm., als kleinsten, ebenfalls in zwei Fällen 2,255 Mm., im Mittel erhielt er 2,506 Mm. Fügen wir dazu die Dicke der Cornea, so erhalten wir als grössten Werth für den Abstand der vorderen Linsenfläche von der vorderen Fläche der Cornea 4,239 Mm., als kleinsten Werth 3,044 Mm., im Mittel 3,509.

Es ergeben sich also auch hier, wie für die Dicke der Hornhaut, ziemlich bedeutende individuelle Verschiedenheiten. Die von C. Krause erhaltenen Resultate sind von Helmholtz**) durch Messungen an lebenden Augen bestätigt worden; die von Helmholtz zu dieser Untersuchung benutzte Methode zu beschreiben, würde uns hier zu weit führen, wir verweisen deswegen auf Helmholtz' Arbeit. Die von ihm an drei Augen gefundenen Werthe für den Abstand des Scheitels der Hornhaut von der vorderen Linsenfläche sind 4,024 Mm., 3,597 Mm., 3,739 Mm., im Mittel also 3,787 Mm., ein Werth, welcher von dem von Krause gefundenen nur wenig verschieden ist.

§. 11.

Die Krystalllinse des Auges. Die optischen Constanten der Krystalllinse, welche wir zur Bestimmung des Ganges der

*) C. Krause. Poggendorff's Annalen Band XXXIX.

**) Helmholtz. Graefe's Archiv Bd. I. Abthlg. 2, p. 30 ff. Physiolog. Optik §. 3.

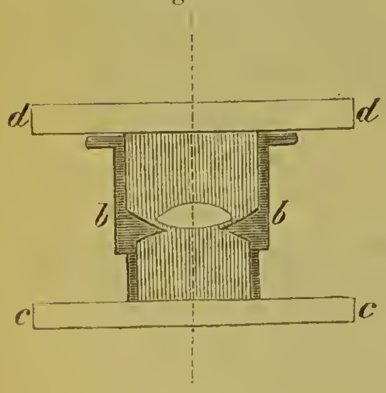
Lichtstrahlen kennen müssen, sind ihre Hauptbrennweiten und die Lage ihrer Hauptpunkte. Dieselben lassen sich wegen der eigenthümlichen Structur der Linse, wie Helmholtz nachgewiesen hat, nicht aus dem Brechungsexponenten und den Krümmungsradien ihrer Oberfläche bestimmen. Die Linse besteht nämlich aus einem innern Kern und einer sehr grossen Anzahl dünner Schichten, welche den Kern einhüllen; die Brechungsexponenten der Schichten sind von einander und von dem des Kernes verschieden, und zwar so, dass der Brechungsexponent des Kernes am grössten ist, und die Brechungsexponenten der Schichten um so kleiner werden, je weiter sie von dem Kern entfernt sind. Es ergibt sich das unter andern aus folgenden von W. Krause nach der im vorigen Paragraph beschriebenen Methode erhaltenen Resultaten. Krause erhielt als Brechungsexponenten

für die äussere Schicht	mittlere Schicht	Kern
$n_1 = 1{,}4053$	1,4294	1,4541

im Mittel.

Die Krümmungsradien der einzelnen Schichten werden von aussen nach innen immer kleiner, der Krümmungsradius der innersten, den Kern unmittelbar einschliessenden Schicht ist am kleinsten, er ist gleich dem Krümmungsradius des Kernes. Daraus folgt, dass jede einzelne Schicht und alle zusammen als eine concavconvexe Linse wirken, die den biconcaven Linsenkern umgeben. Um demnach die Brennweiten und Hauptpunkte der Krystalllinse berechnen zu können, müsste man die Krümmungen der einzelnen Flächen und die Brechungsexponenten der einzelnen Schichten bestimmen können, eine Aufgabe, welche nicht zu lösen ist.

Fig. 19.



Helmholtz hat deshalb auf rein experimentellem Wege sowohl die Brennweiten der Krystalllinse als auch die Lage der Hauptpunkte in derselben bestimmt.*) Das von ihm zu diesem Zwecke benutzte Verfahren ist folgendes. Eine Messingröhre *bb* Fig. 19 ist auf eine planparallele Glasplatte *cc* aufgekittet. Das Messingrohr hat in seiner Mitte eine horizontale, auf der

*) Helmholtz. Physiologische Optik §. 10 p. 79.

obern Seite concave und in ihrer Mitte mit einer runden Oeffnung versehene Scheidewand. Der unterhalb der Scheidewand befindliche Raum wird nun zunächst mit Glaskörper angefüllt und dann die Krystalllinse mit ihrer flachen Seite nach unten auf die Oeffnung der Scheidewand gelegt. Die Krystalllinse muss unmittelbar vorher mit grösster Vorsicht, ohne harte Berührung und ohne irgend welche Verletzung aus dem Auge herausgenommen sein, oder wenn man sie früher präparirt hat, so lange in Glasfeuchtigkeit aufbewahrt sein, da die Linse an der Luft trocken wird und eine faltige Oberfläche erhält. Darauf wurde auch der über der Krystalllinse befindliche Raum des Rohres mit Glaskörper gefüllt und schliesslich auf das Rohr eine Glasplatte *dd* gelegt, welche dem Glaskörper oben eine ebene Oberfläche gab. Nun wurde mit einem Ophthalmometer die Grösse der Bilder gemessen, welche dieses System von Objecten entwarf, welche sich unterhalb desselben befanden. Zu dem Ende wurde die ganze Vorrichtung auf das Rohr eines Mikroskopes gesetzt, aus welchem alle Linsen und Blendungen entfernt waren, so dass die Axe des Mikroskoprohres zugleich die Axe der Linse war. Als Object benutzte Helmholtz eine Messingplatte mit S'Gravesand'schen Schneiden, deren Zwischenraum direct und im Bilde gemessen wurde. Diese Platte wurde einmal auf den Objecttisch des Mikroskopes und bei der zweiten Messung unmittelbar unter die Glasplatte *cc* gelegt, zwischen die Platte *cc* und das Rohr des Mikroskops.

Um nun hieraus die Hauptbrennweiten und die Lage der Hauptpunkte der Krystalllinse zu berechnen, zerlegen wir das ganze optische System in zwei Theile. Dasselbe besteht aus der unteren ebenen Glasplatte *cc*, vor welcher Luft, hinter welcher Glaskörper ist, und der Krystalllinse, welche auf beiden Seiten von Glaskörper umgeben ist. Wir berechnen nun zunächst die Lage und Grösse des von der ebenen Glasplatte entworfenen Bildes und betrachten dann dieses Bild als das Object für die Krystalllinse. Ist die Grösse dieses Bildes gleich y_1, sein Abstand von dem ersten Hauptpunkte der Krystalllinse a ist die erste Hauptbrennweite der Krystalllinse im Glaskörper gleich A_2, die zweite Hauptbrennweite gleich F_2, und y_2 die Grösse des von der Krystalllinse entworfenen Bildes, so ist nach §. 8

$$y_2 = -\frac{A_2}{a - A_2} \cdot y_1.$$

Da die Krystalllinse auf beiden Seiten dasselbe brechende Mittel hat, so sind die beiden Hauptbrennweiten derselben gleich, also $A_2 = F_2$. Wir können deshalb obige Gleichung auch schreiben

$$y_2 = -\frac{F_2}{a - F_2} \cdot y_1$$

oder

$$\frac{F_2 - a}{F_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten 1 ab, so wird

$$\frac{F_2 - a - F_2}{F_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_2}$$

oder

$$\frac{a}{F_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_2}.$$

Die Grösse des Bildes y_2 wird gemessen; um also aus dieser Gleichung F_2 die Hauptbrennweite der Krystalllinse zu berechnen, müssen wir den Abstand a des von der ebenen Glasplatte entworfenen Bildes y_1 vom unteren Hauptpunkte der Linse und die Grösse dieses Bildes bestimmen.

Bezeichnen wir nun den Abstand des von der Platte cc entworfenen Bildes von der obern Fläche der Platte mit f, den Abstand der obern Fläche der Platte von der untern Fläche der Linse, die Dicke der Glaskörperschicht zwischen Platte und Linse mit D, ferner den Abstand des untern Hauptpunktes der Linse, von der untern Fläche der Linse mit h_1, so ist zunächst

$$a = f + D + h_1.$$

Die Dicke D messen wir direct; um den Abstand f zu bestimmen, benutzen wir die Gleichung I des §. 4, wir berechnen den Abstand des von der ebenen Glasplatte entworfenen Bildes von der hintern Fläche dieser Platte. Ist der Abstand des Objectes von der untern Grenzfläche der Platte cc gleich a_1, wenn das Object auf dem Objecttische des Mikroskopes liegt, und ist d die Dicke der Platte, so erhalten wir zunächst nach Gleichung I, §. 4

$$f = \frac{n'd\varrho\left\{(n-1)\ a - r\right\} - nn'ar\varrho}{a\left\{(n'-1)(n-1)\ d - (n'-1)\ nr - (n-1)\varrho\right\} - (n'-1)\ rd + r\varrho}$$

worin n der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Uebergange aus Luft in die Glasplatte cc und n' jener beim Uebergange aus

dem Glase in den Glaskörper ist. Da die beiden Begrenzungsflächen der Platten Ebenen sind, so sind sowohl r als ϱ, die Radien der Grenzflächen, unendlich gross, und der Ausdruck für f wird dadurch unbestimmt, er erhält die Form unendlich durch unendlich dividirt. Seinen Werth können wir erhalten, wenn wir Zähler und Nenner durch das Produkt $r\varrho$ dividiren. Dadurch wird f

$$f = \frac{\frac{n'd\,.\,(n-1)\,a_1}{r} - n'd - nn'a_1}{a_1\left\{(n'-1)(n-1)\frac{d}{r\varrho} - (n'-1)\frac{n}{\varrho} - (n-1)\frac{1}{r}\right\} - (n'-1)\frac{d}{\varrho} + 1}$$

Alle Glieder auf der rechten Seite, welche noch r oder ϱ im Nenner haben, sind gleich Null, da die Nenner dieser Glieder unendlich gross sind, und Quotienten, deren Nenner unendlich gross sind, den Werth Null haben. Daraus folgt

$$f = -\left\{n'd + nn'a_1\right\};$$

das negative Vorzeichen in dem Werthe für f bedeutet, dass das Bild um die in der Klammer befindliche Grösse vor der zweiten Fläche liegt. Diesen Werth von f haben wir in die Gleichung für a

$$a = f + D + h_1$$

mit dem positiven Vorzeichen einzusetzen, da das Bild um diesen Abstand vor der zweiten Fläche der Platte liegt, also nach derselben Richtung vor dem ersten Hauptpunkte der Linse wie die Platte selbst, der Werth von f muss also dasselbe Vorzeichen erhalten wie D. Es ist somit

$$a = nn'a_1 + n'd + D + h_1.$$

Die Grösse des von der ebenen Glasplatte entworfenen Bildes y_1 ist gleich der Grösse des Objectes selbst; es ergibt sich das unmittelbar aus der Gleichung II des §. 4, in welcher die Grösse des Bildes gegeben ist, welches ein System von zwei brechenden Flächen in einem Abstande f von der zweiten Fläche von einem Objecte entwirft, welches sich in einem Abstande a_1 von der ersten befindet. Die Gleichung war

$$y_1 = \frac{r\varrho}{a_1\left\{(n'-1)(n1-)d-(n'-1)nr-(n-1)\varrho\right\} - (n'-1)rd + r\varrho} \cdot Y$$

Dividiren wir auch hier Zähler und Nenner durch das unendlich grosse Produkt $r\varrho$, so wird

$$y_1 = Y.$$

Von diesem Bilde entwirft nun die Krystalllinse ein Bild, dessen Grösse y_2 mit dem Ophthalmometer gemessen wird, und welches uns die oben abgeleitete Gleichung liefert

$$\frac{y_2 - Y}{y_2} = \frac{a}{F_2},$$

oder wenn wir den soeben bestimmten Werth für a einsetzen

$$\frac{y_2 - Y}{y_2} = \frac{nn'a_1 + n'd + D + h_1}{F_2} \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

In dieser Gleichung sind zwei Unkekannte, h_1 und F_2, sie allein ist daher zu deren Bestimmung noch nicht ausreichend, man macht deshalb noch, wie vorhin erwähnt, eine zweite Messung, indem man die S'Gravesand'schen Schneiden unmittelbar unter die Platte cc legt. Ist die Grösse des Objectes dann Y_1, die Grösse des Bildes η_2 und der Abstand der Schneiden von der untern Fläche der Platte cc gleich a_2, so ist jetzt

$$\frac{\eta_2 - Y_1}{\eta_2} = \frac{nn'a_2 + n'd + D + h_1}{F_2} \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Ziehen wir die Gleichung (B) jetzt von der Gleichung (A) ab, so erhalten wir

$$\frac{y_2 - Y}{y_2} - \frac{\eta_2 - Y}{\eta_2} = \frac{nn'(a_1 - a_2)}{F_2},$$

also eine Gleichung, welche nur mehr die Unbekannte F_2, die Hauptbrennweite der Krystalllinse, wenn sie auf beiden Seiten von Glaskörper umgeben ist, enthält, welche also diese Unbekannte zu berechnen gestattet. Bringen wir die linke Seite der Gleichung auf gleiche Benennung und multipliciren beide Seiten mit F_2, so wird

$$F_2 \frac{\eta_2 (y_2 - Y) - y_2 (\eta_2 - Y_1)}{y_2 \cdot \eta_2} = nn'(a_1 - a_2)$$

und dividiren wir schliesslich durch den Coefficienten von F_2, so erhalten wir

$$F_2 = \frac{nn'(a_1 - a_2) \cdot y_2 \eta_2}{\eta_2 (y_2 - Y) - y_2 (\eta_2 - Y_1)} = \frac{nn'(a_1 - a_2) \cdot y_2 \eta_2}{y_2 Y_1 - \eta_2 Y}.$$

Hat man auf diese Weise F_2 erhalten, so liefert eine der Gleichungen (A) oder (B) auch den Abstand h_1 des untern Hauptpunktes von dem untern Scheitel der Linse.

Bei der Berechnung dieser Werthe ist darauf zu achten, dass, wenn das Bild ein umgekehrtes ist, wenn also der Abstand des Objectes von dem untern Hauptpunkte grösser ist, als die Hauptbrennweite, y_2 in obiger Gleichung mit dem negativen Vorzeichen zu versehen ist.

Kennt man so die Hauptbrennweite F_2, so hat man, um auch den zweiten Hauptpunkt zu finden, die Linse einfach umzulegen und dann noch eine Messung zu machen. Ist der Abstand des zweiten Hauptpunktes von der zweiten, jetzt unteren Linsenfläche h_2, und a dann der Abstand des leuchtenden Objectes von der untern Fläche der Glasplatte, so erhalten wir h_2 aus der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{y}_2 - Y_2}{\mathfrak{y}_2} = \frac{nn'a + n'd + D + h_2}{F_2},$$

worin $\mathfrak{y}_2$ und Y_2 jetzt die Grösse des Bildes und Objectes bedeuten.

Die so gefundenen Brennweiten und Hauptpunkte sind jene, welche derselben Linse zukommen, wenn sie sich im Auge befindet, denn im Auge ist die Linse von der wässerigen Feuchtigkeit und dem Glaskörper umgeben, welche beide denselben Brechungsexponenten haben; sie befindet sich also unter denselben Umständen, unter welchen obige Messungen angestellt sind. Die an zwei Linsen von Helmholtz aufgefundenen Zahlen sind folgende:

Brennweite	F =	45,144 Mm.	47,435 Mm.
Abstand des ersten Hauptpunktes von der vordern (flachern) Fläche	h_1 =	2,258 „	2,810 „
Abstand des zweiten Hauptpunktes von der hintern (gewölbtern) Fläche	h_2 =	1,546 „	1,499 „
Die Dicke dieser Linsen fand sich durch direkte Messung		4,2 „	4,314 „

Helmholtz hat an diesen beiden Linsen auch die Krümmungsradien der Grenzflächen der Linsen in der vorhin angegebenen Weise durch Spiegelung mit dem Ophthalmometer gemessen und fand

Krümmungsradius im Scheitel der vordern Linsenfläche	10,162 Mm.	8,865 Mm.
Krümmungsradius im Scheitel der hintern Linsenfläche	5,860 „	5,889 „

Die nach dem Vorigen eigenthümlich zusammengesetzte Linse kann ihrer Wirksamkeit nach durch eine homogene Linse mit gleichen Krümmungsradien, wie sie die Linse in Wirklichkeit besitzt, ersetzt werden. Der Brechungsexponent dieser Linse lässt sich mit Hülfe der für die Hauptbrennweiten aufgestellten Formeln berechnen, indem wir dieselbe nach n auflösen. Diesen Brechungsexponenten einer solchen homogenen, die wirkliche Linse ersetzenden Linse bezeichnet man als den totalen Brechungsexponenten der Linse; derselbe ist grösser als der Brechungsexponent des Kernes, da die Brennweite der Linse in Folge ihrer eigenthümlichen Construction kleiner ist, als wenn die ganze Linse denselben Brechungsexponenten hätte wie der Kern. Für die beiden von Helmholtz untersuchten Linsen ergibt sich 1,4519 und 1,4414.

Betreffs der Bestimmung der optischen Constanten der Linse ist noch zu erwähnen, dass im lebenden Auge die Form der Linse sich ändert, je nachdem es in die Nähe oder Ferne sieht, beim Sehen in die Nähe wird die Linse gewölbter und damit ihre Brennweite kleiner. Wenn wir obige Messungen von Helmholtz auf das lebende Auge übertragen, so gelten sie für in die Ferne sehende Augen.

§. 12.

Gang der Lichtstrahlen im Auge. In den beiden letzten Paragraphen haben wir die Constanten des optischen Apparates in unserm Auge bestimmt; um nun den Gang der Lichtstrahlen im Auge vollständig übersehen zu können, müssen wir jetzt die Cardinalpunkte des ganzen Systems aus den gefundenen Constanten ableiten. Wie wir sahen, hängen die Constanten von der individuellen Beschaffenheit des gerade untersuchten Auges ab, somit haben die Cardinalwerthe, wenn wir die zu einem Auge gehörigen Brechungsexponenten und Krümmungsradien einsetzen, auch nur für dieses individuelle Auge Gültigkeit, für welches die Werthe bestimmt sind. Nehmen wir aber einen Mittelwerth aus den besten Messungen, so werden die erhaltenen Resultate mit kleinen Abweichungen für sämmtliche normal gebildeten, in die Ferne sehenden Augen gültig sein. In dieser Weise hat zuerst Listing aus den vor den Untersuchungen von Helmholtz gefundenen Werthen die Lage der Cardinalpunkte im menschlichen

Auge abgeleitet; er nennt das so bestimmte Auge „das schematische Auge."

Die von Listing hierbei angenommenen Werthe sind folgende:

1. Brechungsexponent des Lichtes beim Uebertritte aus Luft in die Hornhaut und wässerige Feuchtigkeit . . . . $\frac{103}{77} = 1{,}3377$
2. Brechungsexponent des Lichtes beim Uebertritte aus Luft in die Krystalllinse (totaler Brechungsexponent) . . . . $\frac{16}{11} = 1{,}4545$
3. Brechungsexponent des Lichtes beim Uebertritte aus Luft in Glaskörper . . . . $\frac{103}{77} = 1{,}3377$
4. Krümmungsradius der Hornhaut . . . . . . 8 Mm.
5. Krümmungsradius der vordern Linsenfläche . 10 „
6. Krümmungsradius der hintern Linsenfläche . 6 „
7. Entfernung der vordern Hornhaut und Linsenfläche . . . . 4 „
8. Dicke der Linse . . . . 4 „

Die Werthe für die Brechungsexponenten der Hornhaut, wässerigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers müssen nach den Untersuchungen von W. Krause, wenn man ein mittleres normales Auge bestimmen will, wohl etwas grösser genommen werden, da die von Listing angenommenen Werthe sich nur wenig von den kleinsten von Krause gefundenen Werthen unterscheiden. Krause fand im Mittel für die Hornhaut 1,3507, für die wässerige Feuchtigkeit 1,3420, für den Glaskörper 1,3485. Nehmen wir von diesen drei Werthen das Mittel, so werden wir wohl einen dem mittlern normalen Auge entsprechenden Werth erhalten, derselbe ist dann 1,3465 oder fast genau $\frac{101}{75}$. Wir wollen diesen Werth als Brechungsexponenten der Hornhaut, wässerigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers annehmen. Der von Listing für den totalen Brechungsexponenten angenommene Werth stimmt ungefähr mit den aus Helmholtz' Messungen der Brennweiten sich ergebenden überein, und ist ein klein wenig grösser, als der von Krause für den Brechungsexponenten des Kerns gefundene Werth. Wenn wir uns bei der Berechnung des Auges die Krystalllinse durch eine homogene Linse ersetzt denken wollen, können wir diesen Werth des Brechungsexponenten beibehalten.

Die einzelnen Krümmungsradien, welche Listing angenommen hat, sind etwas zu gross, wenn sie für ein mittleres nor-

males Auge gelten sollen. Für die Hornhaut zunächst ergibt sich aus den Messungen von Kohlrausch im Mittel 7,87, aus den drei Messungen von Helmholtz 7,713, aus beiden ergibt sich als Mittel 7,79 oder abgerundet 7,8.

Die beiden Krümmungsradien der Grenzflächen der Linse sind nach der Annahme von Listing mit den Messungen von Helmholtz ziemlich in Uebereinstimmung, letztere ergeben indess einen etwas kleineren Werth, nämlich für den Radius der Vorderfläche 9,51 und den Radius der hintern Fläche 5,87. Mit diesen Werthen und dem Brechungsexponenten 1,4545 erhalten wir einen Werth für die Brennweiten, welcher mit dem Mittel von Helmholtz übereinstimmt, den einzigen direkten Messungen, welche es bisher gibt.

Für den Abstand der vordern Linsenfläche von der Vorderfläche der Hornhaut erhalten wir aus den Messungen Krause's im Mittel 3,50, aus denen Helmholtz' 3,78, also immer einen kleineren, als Listing ihn annimmt. Wir wollen denselben den Messungen von Helmholtz gemäss gleich 3,78 setzen.

Die Dicke der Linse 4 Mm. stimmt mit der Messung von Helmholtz überein, wir wollen dieselbe auch unseren Rechnungen zu Grunde legen, obwohl Helmholtz nach einigen Messungen an lebenden Augen etwas kleinere Werthe gefunden hat.

Die den folgenden Rechnungen zu Grunde zu legenden Werthe sind also

1.	Brechungsexponent der Hornhaut, der wässerigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers . .	$\frac{101}{75} = 1,3465$
2.	Totaler Brechungsexponent der Linse . . .	$\frac{16}{11} = 1,4545$
3.	Krümmungsradius der Hornhaut	7,8 Mm.
4.	„ „ vordern Linsenfläche .	9,51 „
5.	„ „ hintern „ .	5,87 „
6.	Abstand der vordern Linsenfläche von der vordern Hornhautfläche	3,78 „
7.	Dicke der Linse	4 „

Wir betrachten nun das Auge am bequemsten als ein System von drei brechenden Flächen, deren erste die Hornhaut ist, deren andere zusammen die Linse bilden. Um die Cardinalpunkte dieses ganzen Systems zu bestimmen, haben wir dieselben zunächst für die einzelnen Theile desselben aufzusuchen. Als ersten Theil betrachten wir die Vorderfläche der Hornhaut, vor welcher Luft, hinter welcher wässerige Feuchtigkeit sich befindet. Als zweiten

Theil die Krystalllinse, vor und hinter welcher sich Mittel gleichen Brechungsvermögens befinden.

Die Hauptpunkte des ersten Theiles befinden sich nach §. 5 beide im Scheitel der Hornhaut.

Für die zweite Hauptbrennweite haben wir nach §. 2 die Gleichung

$$F_1 = \frac{nr}{n-1};$$

setzen wir darin $n = 1{,}3465$, $r = 7{,}8$, so wird

$$F_1 = \frac{1{,}3465 \,.\, 7{,}8}{0{,}3465} = 30{,}31 \text{ Mm.}$$

Für die erste Brennweite haben wir

$$A_1 = \frac{F_1}{n} = \frac{r}{n-1} = \frac{7{,}8}{0{,}3465} = 22{,}22 \text{ Mm.}$$

Durch die Lage der Hauptpunkte, Knotenpunkte und Hauptbrennpunkte ist das Verhalten der Hornhaut vollständig bestimmt, der erste Hauptbrennpunkt liegt hiernach um 22,22 Mm. vor der vordern Fläche der Hornhaut, der zweite um 30,31 Mm. hinter derselben.

Der zweite Theil unseres Systems ist die Krystalllinse, welche wir uns durch eine homogene Linse mit den vorhin angegebenen Constanten ersetzt denken. Die Lage des ersten Hauptpunktes derselben erhalten wir nach §. 5 aus der Gleichung

$$h' = \frac{(n'-1)\, rd}{(n'-1)(n-1)\, d - (n'-1)\, nr - (n-1)\, \varrho}.$$

worin d die Dicke, r der Radius der vordern, ϱ der Radius der hintern Fläche der Linse ist, n den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus der wässerigen Feuchtigkeit in die Linse und n' denjenigen beim Uebergange des Lichtes aus der Linse in den Glaskörper bedeutet. Da das Brechungsvermögen der wässerigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers dasselbe ist, so folgt zunächst $n' = \frac{1}{n}$. Führen wir den Werth ein, so wird

$$h' = \frac{dr}{(n-1)\, d - n\,(r-\varrho)}.$$

Den Werth von n erhalten wir aus den angegebenen Constanten folgendermassen; ist n_1 der Brechungsexponent des Lichtes beim Uebergange aus Luft in wässerige Feuchtigkeit, n_2 jener bei

dem Uebergange aus Luft in die Linse, so ist, wie schon mehrfach erwähnt,

$$n \,.\, n_1 = n_2; \quad n = \frac{n_2}{n_1},$$

somit

$$n = \frac{1{,}4545}{1{,}3465} = 1{,}0802.$$

Setzen wir nun für r seinen Werth 9,51 Mm., für $d = 4$ Mm. und für ϱ, da die hintere Fläche dem ankommenden Lichte ihre concave Seite zuwendet, $\varrho = -$ 5,87 Mm. ein, so wird

$$h' = \frac{4 \,.\, 9{,}51}{0{,}0802 \,.\, 4 - 1{,}0802\,(9{,}51 + 5{,}87)} = - \frac{38{,}04}{16{,}2926} = - 2{,}334 \text{ Mm.}$$

Der erste Hauptpunkt liegt also übereinstimmend mit den Messungen von Helmholtz im Innern der Linse um 2,334 Mm. hinter dem Scheitel der vordern Fläche.

Für den zweiten Hauptpunkt haben wir nach §. 5

$$h'' = \frac{(n - 1)\, n' d\, \varrho}{(n' - 1)\,(n - 1)\, d - (n' - 1)\, nr - (n - 1)\, \varrho}$$

oder mit Beachtung, dass $n' = \frac{1}{n}$

$$h'' = - \frac{d\, \varrho}{(n - 1)\, d - n\,(r - \varrho)} = - \frac{23{,}48}{16{,}2926} = - 1{,}441 \text{ Mm.}$$

Der zweite Hauptpunkt liegt also ebenfalls in der Linse, um 1,441 Mm. vor dem Scheitel der hintern Fläche.

Die beiden Hauptbrennweiten der Linse sind einander gleich, da sich an beiden Seiten derselben dasselbe brechende Mittel befindet.

Für die zweite Hauptbrennweite haben wir nach §. 6

$$F_2 = \frac{n\, n' r\, \varrho}{(n' - 1)\, nr + (n - 1)\, \varrho - (n - 1)\,(n' - 1)\, d}$$

oder mit Beachtung, dass $n' = \frac{1}{n}$

$$F_2 = \frac{r\, \varrho}{(n - 1)\left\{\varrho - r + \frac{n - 1}{n} \cdot d\right\}} = \frac{9{,}51 \,.\, 5{,}87}{0{,}0802\left\{5{,}87 + 9{,}51 - \frac{0{,}0802}{1{,}0802} \cdot 4\right\}}$$

$$F_2 = \frac{55{,}8237}{0{,}0802\,(15{,}38 - 0{,}295)} = 46{,}142.$$

Dieser Werth der Hauptbrennweite liegt zwischen den beiden von Helmholtz durch direkte Messung erhaltenen Werthen; er

gibt an, dass Strahlen, welche in der wässerigen Feuchtigkeit einander und mit der Axe der Linse parallel sind, nach der Brechung in der Linse in einem Abstande von 46,142 Mm. hinter dem zweiten Hauptpunkte der Linse sich vereinigen, oder dass Strahlen, welche in der wässerigen Feuchtigkeit nach einem 46,142 vor dem ersten Hauptpunkte der Linse liegenden Punkte convergiren, nach der Brechung in der Linse parallel einander weiter gehen.

Mit Hülfe der im §. 8 für ein System von mehr als zwei brechenden Flächen entwickelten Gleichungen erhalten wir nun die Cardinalpunkte des Auges selbst.

Den ersten Hauptpunkt des Auges bekommen wir aus der Gleichung

$$h_1 = \frac{A_1 \, D}{D - F_1 - A_2},$$

worin h_1 den Abstand des Hauptpunktes des ganzen Systems vom ersten Hauptpunkte des ersten Systems, hier also vom Scheitel der Hornhaut, A_1 die erste Hauptbrennweite, F_1 die zweite Hauptbrennweite des ersten Systems, A_2 die erste Hauptbrennweite des zweiten Systems und D der Abstand des ersten Hauptpunktes des zweiten Systems, der Krystalllinse vom zweiten Hauptpunkte des ersten Systems, hier ebenfalls der Scheitel der Hornhaut, bedeutet. Setzen wir die soeben im Einzelnen bestimmten Werthe, und für D die Summe des Zwischenraumes zwischen der Hornhaut und der Krystalllinse und des Abstandes des ersten Hauptpunktes der Linse vom Scheitel derselben, so wird

$$h_1 = \frac{22{,}22 \,.\, 6{,}114}{6{,}114 - 30{,}31 - 46{,}142} = - \frac{135{,}85308}{70{,}338} = - 1{,}931 \text{ Mm.}$$

Der erste Hauptpunkt des Auges liegt also in der wässerigen Feuchtigkeit um 1,931 Mm. hinter der Vorderfläche der Hornhaut.

Die Lage des zweiten Hauptpunktes erhalten wir aus der Gleichung

$$h_2 = \frac{D \,.\, F_2}{D - F_1 - A_2},$$

worin h_2 den Abstand des zweiten Hauptpunktes der Krystalllinse bedeutet. Setzen wir die betreffenden Werthe ein, so wird

$$h_2 = \frac{6{,}114 \,.\, 46{,}142}{6{,}114 - 30{,}31 - 46{,}142} = - \frac{282{,}11218}{70{,}338} = - 4{,}011 \text{ Mm.}$$

Der zweite Hauptpunkt liegt also um 4,011 Mm. vor dem zweiten Hauptpunkte der Linse; letzterer liegt nun um 1,441 Mm.

vor der Hinterfläche der Linse, der zweite Hauptpunkt des Auges liegt also um 5,452 Mm. vor der Hinterfläche der Linse, und da letztere um 7,78 Mm. hinter dem Scheitel der vordern Hornhautfläche liegt, so liegt der zweite Hauptpunkt des Auges 2,328 Mm. hinter der Vorderfläche der Hornhaut oder 0,397 Mm. hinter dem ersten Hauptpunkte des Auges.

Die beiden Hauptbrennweiten des Auges erhalten wir nach §. 8 aus den beiden Gleichungen

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2 - D}$$

und die erste

$$A = F \cdot \frac{A_1 A_2}{F_1 F_2}.$$

Setzen wir in den Ausdruck für F die betreffenden Werthe ein, so wird

$$F = \frac{30{,}31 \cdot 46{,}142}{70{,}338} = 19{,}883 \text{ Mm.}$$

Der zweite Hauptbrennpunkt liegt also um 19,883 Mm. hinter dem zweiten Hauptpunkte des Auges, und da dieser um 5,452 Mm. vor der Hinterfläche der Krystalllinse liegt, um 14,431 Mm. hinter der Hinterfläche der Linse.

Da in dem Ausdrucke für die erste Hauptbrennweite

$$F_2 = A_2; \quad F_1 = n \cdot A_1$$

ist, wenn $n = 1{,}3465$ der Brechungsexponent der wässerigen Feuchtigkeit ist, so folgt

$$A = \frac{F}{1{,}3465} = 14{,}767.$$

Der erste Brennpunkt liegt somit um 14,767 Mm. vor dem ersten Hauptpunkte, und da letzterer um 1,931 Mm. hinter dem Scheitel der Hornhaut liegt, um 12,836 Mm. vor dem Scheitel der Hornhaut.

Es erübrigt noch die Bestimmung der Knotenpunkte; wie wir sahen, liegt der erste Knotenpunkt um die zweite Hauptbrennweite hinter dem ersten Hauptbrennpunkte, der zweite um die erste Hauptbrennweite vor dem zweiten Hauptbrennpunkte. Der erste Knotenpunkt liegt demnach 5,116 Mm. hinter dem ersten Hauptpunkte oder 7,047 Mm. hinter dem Scheitel der Hornhaut, 0,734 Mm. vor der Hinterfläche der Linse. Der zweite

Knotenpunkt liegt 0,337 Mm. vor der Hinterfläche der Linse, der Abstand der Knotenpunkte ist gleich 0,397 Mm., gleich dem Abstande der beiden Hauptpunkte von einander. Nach den von uns angenommenen Werthen liegt der Krümmungsmittelpunkt der Hornhaut (Radius 7,8 Mm.) um 0,02 Mm. hinter der hintern Linsenfläche, der erste Knotenpunkt liegt also 0,754 Mm. fast genau $^3/_4$ Mm. vor dem Krümmungsmittelpunkte der Hornhaut.

Der zweite Brennpunkt liegt nach den obigen Rechnungen 14,431 Mm. hinter dem Scheitel der hintern Linsenfläche; nach C. Krause's Messungen liegt nun die Netzhaut 14,387 Mm. hinter dem Scheitel der hintern Linsenfläche; es ergibt sich also, dass das von uns angenommene mittlere normale Auge die parallel auf das Auge auftreffenden Strahlen gerade auf der Netzhaut vereinigt oder dass die Netzhaut in der hintern Brennebene des Auges liegt. Ein solches normales Auge würde also Gegenstände, welche im Verhältniss zum Auge unendlich weit entfernt sind, bei hinreichender Grösse derselben deutlich sehen, so z. B. würde ein solches Auge die Sterne als scharfe leuchtende Punkte, den Mond als eine scharfe Scheibe sehen, da in der That von diesen Gegenständen auf der Netzhaut scharfe Bilder erzeugt werden, und wir jene Gegenstände deutlich sehen, von welchen auf der Netzhaut scharfe Bilder entworfen werden.

Damit ein solches Auge die Gegenstände noch scharf sehe, brauchen dieselben indess nicht unendlich weit entfernt zu sein, in einer Entfernung von 20—25 M. würde das Auge noch immer ziemlich scharf sehen, da die von diesen Gegenständen entworfenen Bilder noch immer fast genau auf die Netzhaut fallen würden. In den oben berechneten Constanten haben wir alle Mittel, die Lage der vom Auge entworfenen Bilder zu berechnen. Nach §. 8 erhalten wir den Abstand des Bildes vom zweiten Hauptpunkte aus der Gleichung

$$f = \frac{a\,F}{a - A},$$

worin die einzelnen Buchstaben die ihnen bisher immer beigelegte Bedeutung haben. Den Abstand des Bildes vom zweiten Brennpunkt erhalten wir daraus, wenn wir die Differenz $f - F$ berechnen

$$f - F = \frac{a\,F}{a - A} - F = \frac{A\,F}{a - A} = \frac{293{,}611}{a - A}.$$

Setzen wir nun z. B. $a = 20$ M., oder der Bequemlichkeit wegen $a - A = 20$ M., rechnen also den Abstand der angesehenen Objecte von dem ersten Hauptbrennpunkte, so erhalten wir für den Abstand des Bildes vom zweiten Hauptbrennpunkte, also von der Netzhaut

$$f - F = \frac{293,611}{20000} = 0,014.$$

Auch in diesem Abstande würde das Auge die angesehenen Gegenstände ohne Weiteres noch hinreichend scharf sehen; anders jedoch, wenn die Gegenstände dem Auge noch näher rücken, dann entfernen sich die Bilder rasch von der Netzhaut und auf derselben treten an Stelle der Bilder der einzelnen Punkte Zerstreuungskreise auf, die sich nicht zu einem Bilde des angesehenen Objectes zusammenfügen. Wird z. B.

$a - A$, so		wird $f - F$	
10	M.	0,028	Mm.
5	M.	0,056	,,
2,5	M.	0,112	,,
1,25	M.	0,224	,,
0,625	M.	0,448	,,
0,312	M.	0,896	,,

Die Bilder rücken somit in demselben Verhältnisse weiter hinter die Netzhaut, als die Gegenstände dem vorderen Brennpunkte des Auges näher rücken; befindet sich das Object etwa einen Fuss vor dem vorderen Brennpunkte, so liegt das Bild etwa 1 Mm. hinter der Netzhaut. Damit nun das Auge auch diese Gegenstände deutlich sehen kann, müssen die Brennweiten desselben sich ändern und zwar kleiner werden. Das geschieht durch die Accommodation des Auges für kleinere Entfernungen, und zwar, wie Helmholtz nachgewiesen hat, im Wesentlichen dadurch, dass die Oberflächen der Krystalllinse stärker gekrümmt werden, wobei zugleich die Linse etwas dicker wird und die vordere Fläche der Linse etwas nach vorn rückt. Es würde die Grenzen dieser Einleitung überschreiten, ausführlicher den Mechanismus der Accommodation zu besprechen, nur wollen wir zeigen, welcher geringer Aenderungen in der Beschaffenheit des Auges es bedarf, um selbst nahe gelegene Gegenstände zu sehen, also deren Bild auf der Netzhaut zu entwerfen.

Wir wollen zu dem Ende die optischen Constanten eines Auges berechnen, in welchem der Krümmungsradius der vorderen

Linsenfläche nur 6 Mm. beträgt, der Krümmungsradius der hintern 5,4 Mm. und die vordere Fläche der Linse um 0,4 Mm. nach vorn gerückt ist, wodurch dann die Dicke der Linse um 0,4 Mm. zugenommen hat. Wir erhalten darnach zunächst die Hauptpunkte dieser Linse

$$h' = \frac{dr}{(n-1)d-n(r-\varrho)} = \frac{4,4\,.\,6}{0,0802.4,4-1,0802\,.\,11,4} = -2,207\text{ Mm.}$$

$$h'' = -\frac{d\varrho}{(n-1)d-n(r-\varrho)} = \frac{4,4\,.\,5,4}{0,0802\,.\,4,4-1,0802\,.\,11,4} = -1,986\text{ Mm.}$$

$$F_2 = \frac{r\varrho}{(n-1)\left\{\varrho-r+\frac{n-1}{n}d\right\}} = \frac{32,4}{0,0802\left\{5,4+6-\frac{0,0802}{1,0802}.\,4,4\right\}} = 36,484.$$

Der Abstand D des ersten Hauptpunktes der Linse von dem Scheitel der Hornhaut ist jetzt

$$D = 3,38 + 2,207 = 5,587\text{ Mm.}$$

und darnach wird der Abstand des ersten Hauptpunktes des Auges von dem Scheitel der Hornhaut

$$h_1 = \frac{A_1\,D}{D-F_1-A_2} = \frac{22,22\,.\,5,587}{5,587-30,31-36,484} = -\,2,028.$$

Der Abstand des hintern Hauptpunktes von dem zweiten Hauptpunkte der Linse wird

$$h_2 = \frac{D\,.\,F_2}{D-F_1-A_2} = \frac{5,587\,.\,36,484}{5,587-30,31-36,484} = -3,330\text{ Mm.}$$

Der Abstand des zweiten Hauptpunktes von der Hornhaut ist darnach 2,464, der Abstand beider 0,436 Mm.

Für die zweite Hauptbrennweite erhalten wir

$$F = \frac{F_1\,.\,F_2}{F_1+F_2-D} = \frac{30,31\,.\,36,484}{61,207} = 18,067\text{ Mm.}$$

und für die erste Hauptbrennweite

$$A = \frac{F}{1,3465} = 13,417\text{ Mm.}$$

Der zweite Hauptbrennpunkt liegt 18,067 Mm. hinter dem zweiten Hauptpunkte, somit 20,531 Mm. hinter der Vorderfläche der Hornhaut oder 12,751 Mm. hinter der Hinterfläche der Linse. Nehmen wir nun nach dem Vorigen an, dass in dem mittleren normalen Auge die Netzhaut 14,431 Mm. hinter der Hinterfläche der Linse liegt, so würde in dem veränderten Auge der zweite Hauptbrennpunkt 1,680 Mm. vor der Netzhaut liegen. Entfernte

Gegenstände würde darnach das Auge in diesem Zustande nicht deutlich sehen können, dagegen würde dasselbe nahe Gegenstände deutlich sehen. Von einem Gegenstande, der 0,144 M. vor dem vorderen Brennpunkte oder 0,155 M. vor dem Scheitel der Hornhaut sich befände, würde das Bild gerade auf der Netzhaut entworfen werden. Ein Auge somit, dessen Linse die zwischen den angegebenen Grenzen liegenden Veränderungen annehmen könnte, wäre im Stande, alle Gegenstände, welche dem Auge bis auf 155 Mm. nahe rückten, nach und nach deutlich zu sehen. Jene Grenzen sind bekanntlich ungefähr die, zwischen welchen ein normales Auge zu accommodiren im Stande ist.

Die letzten Brechungen setzten stillschweigend voraus, dass das betrachtete Auge von monochromatischem Lichte getroffen wird; bei mehrfarbigem oder weissem Lichte werden die von einem Punkte ausgehenden Strahlen nicht in einem Punkte vereinigt, da gemäss §. 9 das Auge als eine Combination von Sammellinsen nicht achromatisch sein kann. In wie weit indess der Chromatismus des Auges auf die von demselben auf der Netzhaut des Auges entworfenen Bilder von Einfluss ist, bedarf hier wohl keiner weitern Erörterung, da sich das mit Hülfe der in dieser Einleitung abgeleiteten Gleichungen mit Beachtung der im §. 9 gemachten Bemerkungen leicht bestimmen lässt.